

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN
F. MAGYAR-WIEN · E. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND II, HEFT 2

MIT 34 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 15. JANUAR 1948)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kürzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag),
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band II, Heft 2

Inhaltsverzeichnis

<i>Originalarbeiten.</i>	Seite
O. Franke , Über ein Extremalprinzip der elektromagnetischen Felder. (Mit 2 Textabbildungen.)	89
C. Kämmerer , Zur Berechnung der Verdampfungswärmen aus der Zustandsgleichung. (Mit 2 Textabbildungen.)	93
A. Neth , Neues Verfahren zur Präzisions-Gitterkonstantenbestimmung. (Mit 7 Textabbildungen.)	106
H. Watzlawek , Sphärische Aberration dünner Einzellinsen nach D. Argentieri. (Mit 2 Textabbildungen.)	114
J. Krames , Untersuchungen über „gefährliche Flächen“ und „gefährliche Räume“ mittels des Aeropjektors „Multiplex“. (Mit 9 Textabbildungen.)	123
H. Korst , Die Temperaturverteilung im Ziehgut beim Drahtziehen. (Mit 2 Textabbildungen.)	132
K. J. Müller , Die Festigkeit rein radial beschauelter Kreiselverdichter-Laufräder. (Mit 10 Textabbildungen.)	138
<i>Berichte</i>	152
Kracmar F., Das Turbulenzproblem.	
<i>Persönliches</i>	165
Franz Jung, Ehrendoktor der Technischen Hochschule Wien.	
<i>Buchbesprechungen</i>	166
Föppl L., Die strenge Lösung für rollende Reibung (L. Richter). — Melan E., Der Brückenbau. 3. Band: Stahlbrücken. 1. Teillieferung (K. Girkmann). — Fischer A., Die philosophischen Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis (F. Kracmar).	

Über ein Extremalprinzip der elektromagnetischen Felder.

Von O. Franke, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Extremalprinzip, das Prinzip der kleinsten Scheinspannung, entwickelt, das den Verlauf der elektrischen und der magnetischen Kraftlinien in den entsprechenden Feldern ebenso bestimmt, wie das bekannte Fermatsche Prinzip den Verlauf der Lichtstrahlen oder das Prinzip von Maupertuis den Verlauf der Bahnkurven von Massenpunkten unter dem Einfluß konservativer Kräfte bei gegebener konstanter Gesamtenergie. Das abgeleitete Extremalprinzip wird zur Gewinnung des Brechungsgesetzes der elektrischen und der magnetischen Kraftlinien herangezogen.

1. Das Prinzip der kleinsten Scheinspannung im elektrischen Feld.

Für jedes elektrostatische Feld, auch wenn es von einem elektrisch keineswegs homogenen Medium erfüllt ist, also auch wenn die Dielektrizitätskonstante eine Funktion des Ortes ist, gilt bekanntlich der Satz, daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} längs einer beliebigen geschlossenen Kurve s verschwindet

$$\oint \mathfrak{E} d\vec{s} = 0, \quad (1)$$

erste Hauptgleichung des elektrostatischen Feldes, $d\vec{s}$ Linienelement der Kurve s .

Dieser Satz ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß das Linienintegral

$$u = \int_B^A \mathfrak{E} d\vec{s} \quad (2)$$

von dem Weg, auf dem man die Ladungseinheit $q = 1$ vom Punkt B in den Punkt A des Feldes bringt, unabhängig ist; man kann ja aus zwei solchen Wegen eine geschlossene Kurve zusammensetzen, längs der das Linienintegral der Feldstärke nach Gl. (1) verschwinden muß (Abb. 1):

$$\begin{aligned} \oint \mathfrak{E} d\vec{s} &= \left(\int_B^A \mathfrak{E} d\vec{s} \right)_{s_1} + \left(\int_A^B \mathfrak{E} d\vec{s} \right)_{-s_2} = 0, \\ \left(\int_A^B \mathfrak{E} d\vec{s} \right)_{-s_2} &= - \left(\int_B^A \mathfrak{E} d\vec{s} \right)_{s_1}, \\ \left(\int_B^A \mathfrak{E} d\vec{s} \right)_{s_2} &= \left(\int_B^A \mathfrak{E} d\vec{s} \right)_{s_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Wir nennen dieses Linienintegral die Spannung zwischen den Punkten B und A . Da der Integrand das Skalarprodukt der beiden Vektoren \mathfrak{E} und $d\vec{s}$ ist, können wir der Gl. (2) auch die folgende Form geben:

$$u = \int_B^A \mathfrak{E} d\vec{s} = \int_B^A |\mathfrak{E}| ds \cos(\mathfrak{E} d\vec{s}). \quad (4)$$

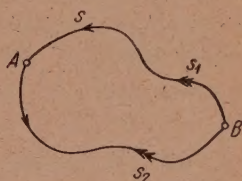


Abb. 1. Linienintegral zwischen zwei Punkten längs verschiedener Wege.

Im Gegensatz zu dieser Spannung wollen wir unter Scheinspannung¹ u_s zwischen den Punkten B und A den folgenden Ausdruck verstehen:

$$u_s = \int_B^A |\mathfrak{E}| ds; \quad (5)$$

physikalische Bedeutung hat diese Scheinspannung nur dann, wenn die Kurve AB , längs der wir das Linienintegral (5) erstrecken, eine zufällig durch die beiden Punkte A und B hindurchgehende Kraftlinie ist; dann fällt die Scheinspannung u_s mit der Spannung u zusammen; in allen anderen Fällen ist

$$u_s > u, \quad (6)$$

da

$$ds \cos (\mathfrak{E} d\mathfrak{s}) \leq ds \dots ds \leq \frac{ds}{\cos (\mathfrak{E} d\mathfrak{s})}, \quad (7)$$

wenn wir voraussetzen, daß die Kurve s_{AB} nicht mit einer Kraftlinie des Feldes zusammenfällt, so daß der Fall des Gleichheitszeichens in Gl. (7) nur für jene wenigen Elemente der Kurve zutrifft, für die $d\mathfrak{s}$ parallel zu \mathfrak{E} ist, während für alle anderen Linienelemente der Kurve das Ungleichheitszeichen gilt. Damit aber haben wir das angekündigte Extremalprinzip bereits gefunden, das wir in dem folgenden Satz aussprechen können: Die Scheinspannung u_s hat den kleinsten überhaupt möglichen Wert, nämlich den der Spannung u , wenn sie längs einer Kraftlinie gebildet wird. Setzen wir von vornherein voraus, daß A und B Punkte derselben Kraftlinie sind, so können wir unserem Extremalprinzip auch die folgende Fassung geben:

Die längs einer Kraftlinie gebildete Scheinspannung zwischen zwei Punkten dieser Kraftlinie ist kleiner als die längs irgendeiner anderen Verbindungslinie der beiden Punkte gebildete Scheinspannung.

Die Scheinspannung ist also längs der Kraftlinie ein Minimum im Verhältnis zu den Scheinspannungen, die sich längs aller anderen Verbindungslinien der beiden Punkte ergeben; wir können Gl. (6) daher auch schreiben:

$$\delta \int_B^A |\mathfrak{E}| ds = 0, \quad (8)$$

denn die Scheinspannung hat dann ein Minimum, wenn ihre Variation verschwindet.

2. Das Prinzip der kleinsten Scheinspannung im magnetischen Feld.

Im elektromagnetischen Feld gilt das sog. Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \frac{4\pi}{c} i, \quad (9)$$

worin \mathfrak{H} die magnetische Feldstärke, d. i. die vom Feld im betreffenden Punkt auf den Einheitspol ausgeübte Kraft bedeutet; es gilt für alle geschlossenen Kurven s , die den Strom i umschlingen; das Linienintegral verschwindet, wenn die Kurve s keinen Strom umschlingt — dieser Fall trifft im magnetostatischen Feld zu — oder wenn die Summe der von der geschlossenen Kurve s umschlungenen Ströme Null ist. Im folgenden wollen wir unsere Betrachtungen auf Kurven beschränken, die die Ströme nicht umschlingen und daher von der nachstehenden Beziehung ausgehen:

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 0; \quad (10)$$

daraus folgern wir wieder, daß das Linienintegral

$$u = \int_B^A \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \int_B^A |\mathfrak{H}| ds \cos (\mathfrak{H} d\mathfrak{s}) \quad (11)$$

¹ Man vergleiche mit den in der Elektrotechnik seit langem eingebürgerten Bezeichnungen Scheinleistung, Scheinwiderstand.

vom Weg, auf dem wir den Einheitspol von B nach A bringen, unabhängig ist. Wir wollen hier u als die magnetische Spannung zwischen den Punkten B und A bezeichnen und davon die magnetische Scheinspannung

$$u_S = \int_B^A |\mathfrak{H}| ds \quad (12)$$

unterscheiden; wie oben stellen wir fest, daß auch hier

$$u_S > u \quad (13)$$

oder

$$\delta \int_B^A |\mathfrak{H}| ds = 0. \quad (14)$$

Der Satz, daß die längs einer Kraftlinie gebildete (magnetische) Scheinspannung zwischen zwei Punkten der Kraftlinie kleiner ist als die längs einer anderen Verbindungslinie der beiden Punkte gebildete Scheinspannung, gilt also auch für das magnetische Feld.

3. Das Brechungsgesetz der Kraftlinien.

Wir wollen nun das eben entwickelte Extremalprinzip anwenden, um das Brechungsgesetz der Kraftlinien abzuleiten. Es seien also, Abb. 2, A und B Punkte der Kraftlinie, der erste im Medium ε_1 bzw. μ_1 , der zweite im Medium ε_2 bzw. μ_2 gelegen, die Ebene E sei Trennungsebene der beiden Medien; innerhalb der beiden Medien sollen die Dielektrizitätskonstanten ε , bzw. die Permeabilitäten μ konstant vorausgesetzt werden. Die Felder wollen wir beiderseits der Trennungsebene als homogen ansehen. Wir berechnen die Scheinspannung zwischen den Punkten A und B :

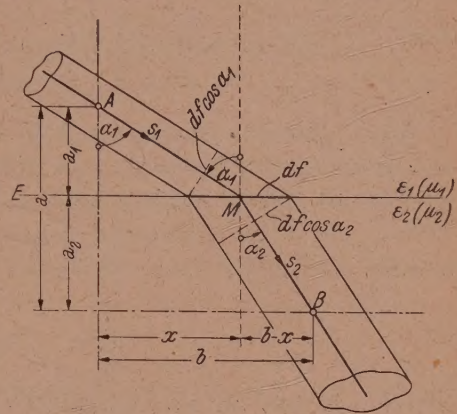


Abb. 2. Brechung der Kraftlinien.

$$\begin{aligned} u_S &= |\mathfrak{E}_2| s_2 + |\mathfrak{E}_1| s_1 \\ u_S &= |\mathfrak{H}_2| s_2 + |\mathfrak{H}_1| s_1 \end{aligned} \quad (15)$$

bzw.

Wir brauchen noch eine Beziehung zwischen den beiden Vektoren \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 bzw. \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 ; diese liefert uns die zweite Hauptgleichung der Felder:

$$\int_0 \mathfrak{D} d\vec{r} = \int_0 \varepsilon \mathfrak{E} d\vec{r} = 0; \quad \int_0 \mathfrak{B} d\vec{r} = \int_0 \mu \mathfrak{H} d\vec{r} = 0. \quad (16)$$

$\mathfrak{D} \dots$ dielektrische Verschiebung

$\mathfrak{B} \dots$ magnetische Induktion

Die rechte dieser beiden Gleichungen gilt allgemein, die linke unter der Voraussetzung, daß die geschlossene Fläche O , über die das Flächenintegral erstreckt wird, keine wahren elektrischen Ladungen einschließt; wir wollen also voraussetzen, daß solche in dem von uns betrachteten Teil des Feldes nicht vorhanden seien. Aus diesen Gleichungen folgt, wie sich leicht zeigen läßt, daß der Verschiebungs- bzw. Induktionsfluß einer Verschiebungs- (Induktions-) Röhre

$$d\Phi_V = \mathfrak{D} d\vec{r} = \varepsilon \mathfrak{E} d\vec{r}; \quad d\Phi = \mathfrak{B} d\vec{r} = \mu \mathfrak{H} d\vec{r} \quad (17)$$

für alle Röhrenquerschnitte derselbe ist. Legen wir nun, wie in Abb. 2 angedeutet, um unsere gebrochene Kraftlinie AMB eine Verschiebungs- (Induktions-) Röhre, so gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 |\mathfrak{E}_1| df \cos \alpha_1 &= \varepsilon_2 |\mathfrak{E}_2| df \cos \alpha_2; & \mu_1 |\mathfrak{H}_1| df \cos \alpha_1 &= \mu_2 |\mathfrak{H}_2| df \cos \alpha_2, \\ \varepsilon_1 |\mathfrak{E}_1| \cos \alpha_1 &= \varepsilon_2 |\mathfrak{E}_2| \cos \alpha_2 = K; & \mu_1 |\mathfrak{H}_1| \cos \alpha_1 &= \mu_2 |\mathfrak{H}_2| \cos \alpha_2 = K; \end{aligned}$$

es ist also

$$|\mathfrak{E}_1| = \frac{K}{\varepsilon_1 \cos \alpha_1}, \quad |\mathfrak{E}_2| = \frac{K}{\varepsilon_2 \cos \alpha_2}; \quad |\mathfrak{H}_1| = \frac{K}{\mu_1 \cos \alpha_1}, \quad |\mathfrak{H}_2| = \frac{K}{\mu_2 \cos \alpha_2}. \quad (18)$$

Damit erhalten wir aus Gl. (15)

$$u_S = K \left\{ \frac{s_2}{\varepsilon_2 \cos \alpha_2} + \frac{s_1}{\varepsilon_1 \cos \alpha_1} \right\} \quad \text{bzw.} \quad u_S = K \left\{ \frac{s_2}{\mu_2 \cos \alpha_2} + \frac{s_1}{\mu_1 \cos \alpha_1} \right\}. \quad (19)$$

Aus Abb. 2 lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{a_2}{s_2}, & \cos \alpha_1 &= \frac{a_1}{s_1}, \\ \frac{s_2}{\varepsilon_2 \cos \alpha_2} &= \frac{s_2^2}{\varepsilon_2 a_2} = \frac{(b-x)^2 + a_2^2}{\varepsilon_2 a_2}, \\ \frac{s_1}{\varepsilon_1 \cos \alpha_1} &= \frac{s_1^2}{\varepsilon_1 a_1} = \frac{x^2 + a_1^2}{\varepsilon_1 a_1}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} u_S &= K \left\{ \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{(b-x)^2 + a_2^2}{a_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{x^2 + a_1^2}{a_1} \right\}, \\ u_S &= K \left\{ \frac{1}{\mu_2} \frac{(b-x)^2 + a_2^2}{a_2} + \frac{1}{\mu_1} \frac{x^2 + a_1^2}{a_1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nach unserem Extremalprinzip muß nun u_S längs des tatsächlichen Verlaufes der Kraftlinie ein Minimum sein; dementsprechend muß der Punkt M auf der Trennungsebene liegen, dessen Lage durch die Abszisse x bestimmt ist; es muß also sein:

$$\begin{aligned} \frac{du_S}{dx} &= 0 = \left\{ -\frac{2}{\varepsilon_2} \frac{b-x}{a_2} + \frac{2}{\varepsilon_1} \frac{x}{a_1} \right\} \\ \text{bzw.} \quad 0 &= \left\{ -\frac{2}{\mu_2} \frac{b-x}{a_2} + \frac{2}{\mu_1} \frac{x}{a_1} \right\}, \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \end{aligned} \quad (21)$$

womit wir das an der Grenzfläche zweier Medien geltende Brechungsgesetz der elektrischen und magnetischen Kraftlinien abgeleitet haben. Wie wir an diesem Beispiel gesehen haben, ersetzt unser Extremalprinzip nur die erste Hauptgleichung der Felder, aus der es ja unmittelbar hervorgegangen ist, nicht aber die zweite Hauptgleichung, mit der es nichts zu tun hat.

4. Vergleich mit den Extremalprinzipien von Fermat und von Maupertuis.

Das in dieser Arbeit entwickelte Prinzip der kleinsten Scheinspannung entspricht vollkommen den für die Optik und für die Mechanik geltenden Extremalprinzipien von Fermat und von Maupertuis; wir haben in unserer Formulierung nur Kraftlinie mit Lichtstrahl oder Bahnkurve, Betrag der Feldstärke mit $1/v$ oder Betrag des Impulses und Scheinspannung mit Lichtzeit oder Wirkungsintegral zu vertauschen, um die beiden anderen Extremalprinzipien zu erhalten.

a) Prinzip der kleinsten Scheinspannung: Die längs einer Kraftlinie gebildete Scheinspannung zwischen zwei Punkten der Kraftlinie ist kleiner als die längs irgendeiner anderen Verbindungslinie dieser beiden Punkte gebildete Scheinspannung.

$$\delta \int_B^A |\mathfrak{E}| ds = 0.$$

b) Prinzip der kleinsten Lichtzeit (Fermatsches Prinzip): Die Zeit, die das Licht braucht, um längs eines Lichtstrahles von einem zu einem anderen Punkt des Strahles zu gelangen, ist kleiner als die Zeit, die es bei gleicher Geschwindigkeit längs irgendeiner anderen Verbindungslinie dieser beiden Punkte brauchen würde.

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{v_p} = 0;$$

v_p Phasengeschwindigkeit des Lichtes an der betrachteten Stelle.

c) Prinzip der kleinsten Wirkung (Prinzip von Maupertuis): Das in einem Potentialfeld längs der Bahn eines Massenpunktes von gegebener Gesamtenergie gebildete Wirkungsintegral zwischen zwei Punkten der Bahnkurve ist kleiner als das längs irgendeiner anderen Verbindungslinie dieser beiden Punkte gebildete Wirkungsintegral.

$$\delta \int_A^B G ds = 0;$$

$G = m v \dots$ Impuls des Massenpunktes (Betrag) an der betrachteten Stelle.

In einer demnächst zu veröffentlichenden Arbeit wird dieser Zusammenhang eingehender untersucht und gezeigt werden, daß man zu den beiden zuletzt angeführten Extremalprinzipien auf genau demselben Wege kommen kann, wie zum Prinzip der kleinsten Scheinspannung.

(Eingegangen am 6. Juni 1946.)

Zur Berechnung der Verdampfungswärmen aus der Zustandsgleichung.

Von C. Kämmerer, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Wie bekannt, lassen sich die kalorischen Größen U , i und S (innere Energie, Enthalpie und Entropie) aus der Zustandsgleichung berechnen, wenn der Verlauf der spezifischen Wärme c_{p0} (oder c_{v0}) über der Temperatur beim Druck Null bekannt ist. So ist z. B.:

$$U = \int c_{v0} dT + A \int \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv + C, \quad (1)$$

wobei C eine willkürlich festzulegende Konstante bedeutet. Gl. (1) geht aus der partiellen Differentialgleichung¹

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_T = A \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] \quad (2)$$

hervor, die aus dem ersten und zweiten Hauptsatz folgt und allgemeingültig ist. Für Zustandsgleichungen vom van der Waalsschen Typus, bei denen der äußere Druck p [kg/m²] als explizite Funktion von v und T erscheint, ist Gl. (2) von besonderer Wichtigkeit, da sie die Berechnung von ΔU [kcal/kg] aus der Zustandsgleichung bei $T = \text{konst.}$ in verhältnismäßig einfacher Weise ermöglicht.

1. Geht man z. B. von der Formel²

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{b}{T v^2} - \frac{a}{T v (v + c)} \quad (3)$$

aus, so wird für konstante Temperatur nach Gl. (1) und (3):

$$\Delta U = A \int \left[T \left(\frac{R}{v} - \frac{b}{T^2 v^2} + \frac{a}{T^2 v (v + c)} \right) - \left(\frac{RT}{v} + \frac{b}{T v^2} - \frac{a}{T v (v + c)} \right) \right] dv$$

oder

$$\Delta U = \frac{2A}{T} \int_1^2 \left(\frac{a}{v(v+c)} - \frac{b}{v^2} \right) dv. \quad (4)$$

Nach Durchführung der Integration ergibt sich für die Änderung der inneren Energie bei isothermischer Expansion der folgende Ausdruck:

$$\Delta U = \frac{2A}{T} \left[\frac{a}{c} \ln \left(\frac{v+c}{v_1+c} \right) + \frac{b}{v} \right]_{v_1}^{v_2}. \quad (5)$$

¹ Eine Ableitung dieser Formel findet sich bei E. Schmidt: Technische Thermodynamik. Berlin: Springer-Verlag. 1936.

² Über eine Zustandsgleichung mit Berücksichtigung des kritischen Koeffizienten. Österr. Ingenieur-Arch. Bd. I, H. 4/5 (1946).

Beim isothermischen Vorgang ist die gegen den äußeren Druck p geleistete Arbeit nach Gl. (3):

$$\int p dv = \int \left(\frac{RT}{v} + \frac{b}{T v^2} - \frac{a}{T v(v+c)} \right) dv \quad (6)$$

und die hierbei zugeführte Wärme $\Delta Q = \Delta U + \int_1^2 A p dv$ nach Gl. (1):

$$\Delta Q = A \int \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p + p \right] dv = A T_1 \int_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv. \quad (7)$$

Für den speziellen Fall der Zustandsgleichung (3) erhält man somit für ΔQ :

$$\begin{aligned} \Delta Q &= A T_1 \int_1^2 \left[\frac{R}{v} - \frac{b}{T^2 v^2} + \frac{a}{T^2 v(v+c)} \right] dv, \\ &= A \int_1^2 \left[\frac{RT}{v} - \frac{b}{T v^2} + \frac{a}{T v(v+c)} \right] dv \end{aligned}$$

oder mit Gl. (4):

$$\Delta Q = A R T \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) + \Delta U/2. \quad (8)$$

Mit Gl. (5) läßt sich nun die innere Verdampfungswärme ϱ [kcal/kg], mit Gl. (6) die äußere Verdampfungswärme ψ und mit Gl. (8) auch die gesamte Verdampfungswärme $r = \varrho + \psi$ berechnen, vorausgesetzt, daß die verwendete Zustandsgleichung das wirkliche Verhalten richtig wiedergibt. Der gewählten Temperaturabhängigkeit des zweiten und letzten Gliedes rechts kommt hierbei besondere Bedeutung zu.

Nach Aufzeichnung der homogenen Isotherme im $p v$ -Diagramm (z. B. Abb. 1) läßt sich in bekannter Weise der Sattdampfdruck p_s und damit das Flüssigkeits- und Dampfvolumen v' bzw. v'' bestimmen.

Nach Gl. (5) wird zunächst die innere Verdampfungswärme

$$\varrho = \frac{2A}{T_s} \left\{ \frac{a}{c} \ln \left[\frac{v''}{(v''+c)} \cdot \frac{(v'+c)}{v'} \right] + b \left(\frac{1}{v''} - \frac{1}{v'} \right) \right\} \quad (9)$$

und nach Gl. (8) die gesamte Verdampfungswärme $r = \varrho + \psi$:

$$r = A R T \ln \left(\frac{v''}{v'} \right) + \varrho/2, \quad (10)$$

wenn man von der Zustandsgleichung (3) mit der primitiven Temperaturabhängigkeit $1/T$ des zweiten und letzten Gliedes ausgeht. Die äußere Verdampfungswärme ψ ergibt sich dann als Differenz $r - \varrho = \psi$.

Schreibt man Gl. (10) in der Form:

$$\psi + \varrho/2 = A R T \ln \left(\frac{v''}{v'} \right)$$

und setzt $\psi = \varepsilon \varrho$, so wird:

$$\varrho = A R T \ln \left(\frac{v''}{v'} \right) \cdot \frac{2}{(1 + 2\varepsilon)}, \quad (11)$$

was mit der von Dieterici (VDIZ. 1941, S. 297) angegebenen Näherungsformel übereinstimmt, wenn man den Faktor $2/(1 + 2\varepsilon) = 1.73$ oder $\varepsilon = 0.135$ setzt.

Rechnungsbeispiel I (0° C-Isotherme der Kohlensäure). Ausgangswerte:

$$\begin{aligned} T_s &= 273.10^\circ K, & R &= 19.27, & A &= 1/427, \\ x &= 0.276, & k &= 3.63, & T_s/T_k &= 0.898, \\ v_k &= 2.156 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/kg]}, & p_k &= 75 \cdot 10^4 \text{ [kg/m}^2\text{]}, & T_k &= 304.1^\circ K. \\ v'' &= 10.383 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/kg]}, & v_x'' &= \frac{v''}{v_k} = 4.82, \\ v' &= 1.081 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/kg]}, & v_x' &= \frac{v'}{v_k} = 0.5025. \end{aligned}$$

Die Konstanten der Zustandsgleichung (3) betragen für CO_2 :

$$a = \frac{v_k^2 p_k (1 - 2x)^3}{(1 - 3x)x^2} = 6.88 v_k^2 p_k T_k,$$

und

$$b = v_k^2 p_k \frac{x}{(1 - 3x)} = 1.605 v_k^2 p_k T_k$$

$$c = v_k \left(\frac{1}{x} - 3 \right) = v_k (k - 3) = 0.63 v_k.$$

Damit wird die innere Verdampfungswärme nach Gl. (9):

$$\begin{aligned} q &= 2 A p_k v_k \left(\frac{T_k}{T_s} \right) \left[\frac{6.88}{0.63} \ln 1.993 + 1.605 \left(\frac{v_k}{v''} - \frac{v_k}{v'} \right) \right] \\ &= 8.43 [7.56 - 2.86] = 39.6 \text{ kcal/kg} \end{aligned}$$

und die gesamte Verdampfungswärme r nach Gl. (10):

$$r = \frac{19.27 \cdot 273 \cdot 16}{427} \ln \left(\frac{10.383}{1.081} \right) + q/2 = 27.9 + 19.8 = 47.7 \text{ kcal/kg}$$

und

$$\psi = r - q = 47.7 - 39.6 = 8.1 \text{ kcal/kg.}$$

Während die äußere Verdampfungswärme mit $\psi = 8.1$ nahezu richtig herauskommt, ist die berechnete Verdampfungswärme r um 8.43, also erheblich kleiner als der Dampftafelwert (56.13 kcal/kg, nach Hütte, 26. Aufl., I. Bd., S. 547).

Diese Unstimmigkeit zeigt, daß die benützte Zustandsgleichung entweder ihrem Aufbau nach oder bezüglich der Temperaturfunktionen des zweiten und letzten Gliedes (oder wegen Nichtberücksichtigung der Assoziierung) nur näherungsweise zutrifft.

Rechnungsbeispiel II (Wasserdampf, 309.5° C-Isotherme). Ausgangswerte:

$$\begin{aligned} T_s &= 582.66^\circ \text{ K}, & R &= 47.1, \\ x &= 0.225, & k &= 1/x = 4.46, \end{aligned}$$

$$v_k = 3.07 \cdot 10^{-3} [\text{m}^3/\text{kg}], \quad p_k = 225 \cdot 10^4 [\text{kg}/\text{m}^2], \quad T_k = 647^\circ \text{ K.}$$

$$\begin{aligned} v'' &= 18.15 \cdot 10^{-3} [\text{m}^3/\text{kg}] & v_x'' &= 5.92 \\ v' &= 1.46 [\text{m}^3/\text{kg}] & v_x' &= 0.476 \end{aligned}$$

Die Konstanten der Zustandsgleichung (3) betragen für Wasserdampf:

$$a = 10.1 v_k^2 p_k T_k, \quad b = 0.693 v_k^2 p_k T_k \quad \text{und} \quad c = 1.445 v_k.$$

Damit wird die innere Verdampfungswärme nach Gl. (9):

$$q = 35.9 (8.2 - 1.34) = 246 \text{ kcal/kg}$$

und die gesamte Verdampfungswärme nach Gl. (10):

$$r = \frac{47.1 \cdot 582.66}{427} \ln \frac{5.92}{0.476} + q/2 = 161.5 + 123 = 284.5 \text{ kcal/kg,}$$

ferner:

$$\psi = 284.5 - 246 = 38.5 \text{ kcal/kg.}$$

Die berechnete äußere Verdampfungswärme $\psi = 38.5$ kcal/kg stimmt mit dem zugehörigen Dampftafelwert von 38.98 kcal/kg (Hütte, 26. Aufl., I. Bd., S. 533) nahezu überein. Hingegen kommt die innere Verdampfungswärme nach Gl. (9) auch für H_2O zu klein heraus. Da die Dampftafel für q den Wert 271.8 angibt, so beträgt der Fehler $271.8 - 246 = 25.8$ kcal/kg, d. h. rund 10%. Die vorstehende Berechnungsart ist allerdings nicht ganz entsprechend, da die Volumina v' und v'' nicht, wie erforderlich, aus der Zustandsgleichung (3) bestimmt, sondern der Einfachheit halber aus der Dampftafel entnommen wurden.

Trotz der einfachen Temperaturabhängigkeit der beiden letzten Glieder lassen sich aber (wie die Beispiele zeigen) aus der Zustandsgleichung (3) die Verdampfungswärmen r , q und ψ wenigstens näherungsweise ermitteln, wenn die kritischen Daten und die Gaskonstante R gegeben sind.

2. Vergleich mit der van der Waalsschen Formel (1873).

Aus der Waalsschen Zustandsgleichung

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (12)$$

ergibt sich für isothermische Zustandsänderung nach Gl. (1):

$$\Delta U = A \int \left[T \left(\frac{R}{v-b} \right) - \frac{RT}{(v-b)} + \frac{a}{v^2} \right] dv = A \int_1^2 \frac{a}{v^2} dv = A a \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) \quad (13)$$

und nach Gl. (7):

$$\Delta Q = A T \int_1^2 \frac{R dv}{(v-b)} = A R T \ln \frac{(v_2-b)}{(v_1-b)}. \quad (14)$$

Die Konstanten a , b und R von Gl. (12) betragen:

$$a = 3 p_k v_k^2, \quad b = v_k/3, \quad R = (8/3) \cdot p_k v_k / T_k.$$

Der kritische Koeffizient $k = \frac{R T_k}{p_k v_k}$ ist sonach vorbestimmt und ergibt sich zu $8/3$ oder 2.67 (ein Wert, der in Wirklichkeit gar nicht vorkommt).

Damit wird:

$$\varrho = 3 A p_k v_k \left(\frac{v_k}{v'} - \frac{v_k}{v''} \right) \quad (15)$$

und

$$r = (8/3) A p_k v_k \left(\frac{T_s}{T_k} \right) \ln \frac{(v''-v_k/3)}{(v'-v_k/3)} \quad (16)$$

oder

$$r = A R T_s \ln \frac{(v''-v_k/3)}{(v'-v_k/3)}. \quad (16a)$$

Für die 0°C -Isotherme der Kohlensäure (Rechenbeispiel I) erhält man nach Einsetzung der früher für v' , v'' usw. angegebenen Werte nach Gl. (15) und (16):

$$\varrho = \frac{3}{427} \cdot 75 \cdot 2 \cdot 156 \cdot 10 \cdot 1.7823 = 20.20 \text{ kcal/kg},$$

$$r = 9.08 \cdot 3.26 = 29.6 \text{ kcal/kg} \quad \text{und} \quad \psi = 9.4 \text{ kcal/kg}.$$

Wie zu erwarten war, ist die Abweichung der berechneten von den gemessenen Verdampfungswärmen bei Gl. (12) erheblich größer als bei Gl. (3).

3. Berechnung nach der Formel von Berthelot.

Eine Verbesserung der Waalsschen Formel (12) erzielte bekanntlich Berthelot (1903), indem er die Temperaturabhängigkeit des Kohäsionsgliedes berücksichtigte und zu folgender Formel gelangte:

$$p = \frac{RT}{(v-b)} - \frac{a}{T v^2}. \quad (17)$$

Nach Gl. (1) und (17) beträgt die Änderung der inneren Energie bei $T = \text{konst.}$:

$$\begin{aligned} \Delta U &= A \int \left[T \left(\frac{R}{v-b} + \frac{a}{T^2 v^2} \right) - \frac{RT}{(v-b)} + \frac{a}{T v^2} \right] dv \\ &= A \int_1^2 \frac{2a}{T v^2} dv = \frac{2 A a}{T_s} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Ferner ist die isothermisch zugeführte Wärme nach Gl. (7):

$$\Delta Q = A \int_1^2 T \left(\frac{R}{v-b} + \frac{a}{T^2 v^2} \right) dv = A R T_s \ln \frac{(v_2-b)}{(v_1-b)} + \frac{\Delta U}{2}. \quad (19)$$

Mit $a = 3 p_k v_k^2 T_k$, $b = v_k/3$ und $R = (8/3) p_k v_k / T_k$ wird nach Gl. (18):

$$\varrho = 6 A p_k v_k \left(\frac{T_k}{T_s} \right) \left(\frac{v_k}{v'} - \frac{v_k}{v''} \right) \quad (20)$$

und die Verdampfungswärme r nach Gl. (19):

$$(19) \quad r = A R T_s \ln \frac{(v'' - v_k/3)}{(v' - v_k/3)} + q/2. \quad (21)$$

Wie ersichtlich, liefert die Rechnung nach Gl. (20) und (21) bedeutend bessere Werte von r und q als nach Gl. (15) und (16). Der Einfluß der Temperaturabhängigkeit des letzten Gliedes wird deutlich erkennbar.

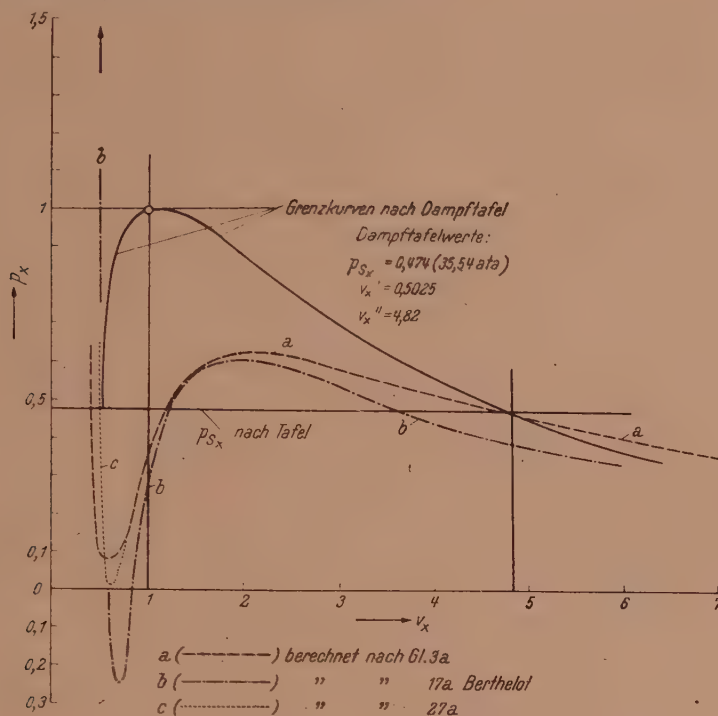


Abb. 1. 0° C-Isotherme der Kohlensäure ($T_x = 0,9$).

Für die 0° C-Isotherme der Kohlensäure (Rechnungsbeispiel I) erhält man mit den früher angeführten (aus der Dampftafel stammenden) Werten für v' und v'' nach der Berthelotschen Zustandsgleichung (17) bzw. nach Gl. (20) und (21):

$$q = 22 \cdot 70 \frac{304 \cdot 1}{273 \cdot 16} \cdot 1 \cdot 782 = 45 \cdot 1 \text{ kcal/kg,}$$

und

$$r = 9 \cdot 08 \cdot 3 \cdot 26 + q/2 = 29 \cdot 6 + 22 \cdot 55 = 52 \cdot 15 \text{ kcal/kg}$$

$$\psi = r - q = 7 \cdot 05 \text{ kcal/kg,}$$

d. h. eine bessere Übereinstimmung mit den Dampftafelwerten als nach Gl. (3). Der Fehler würde nur $56 \cdot 13 - 52 \cdot 15 \pm 4 \text{ kcal/kg}$ betragen. Das Resultat ist aber zu bezweifeln, da Gl. (17) eigentlich nur für Stoffe mit $k = 8/3 = 2 \cdot 67$ gilt, während für Kohlensäure $k = 3 \cdot 63$ ist.

Es ist daher zu untersuchen, ob es im Falle von Gl. (17) zulässig war, die Volumina v' und v'' zur Vereinfachung der Rechnung aus der Dampftafel zu entnehmen, anstatt sie aus dem Isothermenverlauf im $p v$ -Diagramm zu bestimmen.

Die Berechnung dieses Verlaufs wird vereinfacht, wenn man statt der Größen p , v , T die dimensionslosen oder reduzierten Werte $p_x = p/p_k$, $v_x = v/v_k$ und $T_x = T/T_k$ verwendet. Gl. (17) lautet dann:

$$p_x = \frac{8 T_x}{(3 v_x - 1)} - \frac{3}{v_x^2 T_x} \quad (17a)$$

Für die 0° C-Isotherme der Kohlensäure ist die reduzierte Temperatur $T_x = T_{sx}/T_k = \frac{273.16}{304.1} = 0.9$. Für verschiedene Werte von v_x ergeben sich damit aus Gl. (17a) die in Tab. 1 verzeichneten reduzierten Drücke p_x , bzw. der Isothermenverlauf (b) in Abb. 1.

Tabelle 1.

$v_x =$	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.8	0.9	1	1.5	2	3	4	5
p_x nach Gl. 3a	0.08	—	0.07	—	0.1	0.18	0.265	0.345	—	0.623	0.585	0.515	0.454
p_x „ „ 17a	1.08	—	0.13	—	0.25	0.05	0.12	0.27	0.58	0.608	0.529	0.447	0.382
p_x „ „ 27a	0.466	0.025	0.008	0.044	0.08	0.173	—	0.352	—	0.628	0.585	—	0.453

Zum Vergleich sind in Tab. 1 auch die aus Gl. (3) sich ergebenden Drücke angeführt. Die dimensionslose Form dieser Gleichung lautet für CO₂ mit $k = 3.63$:

$$p_x = 3.63 \frac{T_x}{v_x} + \frac{1.605}{v_x^2} - \frac{6.88}{v_x(v_x + 0.623)} \quad (3a)$$

Aus Abb. 1 ist ersichtlich, daß Gl. (17a) ein zu kleines Sattdampfvolumen v_x'' liefert (3.7 gegenüber einem Dampftafelwert von 4.82). Bei Einsetzung dieses aus Gl. (17a) folgenden (aber nicht zutreffenden) Wertes von v_x'' hätte man daher auch ein kleineres q bzw. r erhalten.

Ähnliches gilt von Gl. (3a), die zwar ein annähernd richtiges Sattdampfvolumen v_x'' , aber ein zu kleines Flüssigkeitsvolumen v_x' liefert.

Diese Ungenauigkeit der bekannten Zustandsgleichungen verhindert vorläufig die genaue Berechnung der Verdampfungswärmen auf Grund der streng gültigen Beziehung (1). Die Formeln (9) bzw. (20) können daher nur als Näherungsformeln zur ungefähren Ermittlung der Verdampfungswärme oder richtiger zur Kontrolle der verwendeten Zustandsgleichung dienen.

4. Als vierte Formel soll die im Aufsatz² unter (23b) angeschriebene einfache Beziehung

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{b}{T v^3} - \frac{a}{v^2} \quad (22)$$

auf ihre Brauchbarkeit zur Berechnung der Verdampfungswärmen geprüft werden. Nach Gl. (1) und (22) ergibt sich wieder:

$$\begin{aligned} \Delta U &= A \int \left[T \left(\frac{R}{v} - \frac{b}{T^2 v^3} + \frac{a}{T^2 v^2} \right) - \frac{RT}{v} - \frac{b}{T v^3} + \frac{a}{T v^2} \right] dv, \\ \Delta U &= 2A \int_1^2 \left(\frac{a}{T v^2} - \frac{b}{T v^3} \right) dv, \\ \Delta U &= \frac{2A}{T_s} \left[a \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) - \frac{b}{2} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Mit $a = 3 p_k v_k^2 T_k$, $b = T_k v_k^3 p_k$ und $R = 3 p_k v_k / T_k$ wird die Änderung der inneren Energie bei isothermischer Expansion

$$\Delta U = 2A p_k v_k \frac{T_k}{T_s} \left[3 \left(\frac{v_k}{v_1} - \frac{v_k}{v_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{v_k^2}{v_1^2} - \frac{v_k^2}{v_2^2} \right) \right] \quad (24)$$

und

$$q = \frac{2}{427} \left(\frac{T_k}{T_s} \right) p_k v_k \left[3 \left(\frac{1}{v_x'} - \frac{1}{v_x''} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(v_x')^2} - \frac{1}{(v_x'')^2} \right) \right]. \quad (25)$$

So ergibt sich z. B. für die 0° C-Isotherme der Kohlensäure (Rechnungsbeispiel I) mit den früher angegebenen Werten von $v_x' = 0.5025$, $v_x'' = 4.82$ usw.

$$q = 8.43 \left[3 \left(\frac{1}{0.5025} - \frac{1}{4.82} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{0.2525} - \frac{1}{23.25} \right) \right] = 28.5 \text{ kcal/kg.}$$

Das Resultat ist zwar besser als nach der Waalsschen Formel (12), jedoch wesentlich schlechter als nach Gl. (3) oder (17). Allerdings ist Gl. (22) nur für Stoffe mit dem kritischen Koeffizienten $k = 3$ bestimmt, so daß sie anschließend auch an Helium (mit $k = 3.03$) geprüft werden soll. Für Helium (Rechnungsbeispiel III) beträgt die Verdampfungswärme nach einer Arbeit von Pfaff³ bei einer Siedetemperatur $T_s = 4.26^\circ \text{K}$ und 1 ata rund 5, nach einer anderen Quelle⁴ 6 kcal/kg. Ferner ist:

$$\begin{aligned} v_k &= 14.5 \cdot 10^{-3} [\text{m}^3/\text{kg}] & p_k &= 2.3 \text{ kg/cm}^2 \\ v' &= 8.0 [\text{m}^3/\text{kg}] & v_x'' &= 11.51 & T_k &= 6.26^\circ \text{K} \\ v'' &= 167 [\text{m}^3/\text{kg}] & v_x' &= 0.552 & T_{sx} &= 0.684 \end{aligned}$$

Mit diesen Angaben wäre nach Gl. (25):

$$\dot{q} = 2.3 (3 \cdot 1.723 - 3.2624 \cdot 1/2) = 8.24 \text{ kcal/kg}$$

und mit

$$\psi = A p (v'' - v') = 10^4 (0.167 - 0.008)/427 = 3.72 \text{ kcal/kg}$$

die Verdampfungswärme $r = 11.96 \text{ kcal/kg}$. Gl. (25) liefert somit auch für einen Stoff mit $k \neq 3$ nicht die richtige, sondern jetzt eine zu große Verdampfungswärme (etwa das Doppelte der wirklichen). Vermutlich ist die Temperaturabhängigkeit der beiden letzten Glieder eine andere und wesentlich komplizierter, als in Gl. (22) angenommen.

5. Als fünfte Zustandsgleichung soll die in der Arbeit² unter (21) angeführte Beziehung

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{b}{v^2(v+c)} - \frac{a}{v(v+c)}, \quad (26)$$

und zwar zunächst wieder mit der einfachen Temperaturabhängigkeit $1/T$ der beiden letzten Glieder auf ihre Brauchbarkeit zur Berechnung der Verdampfungswärmen geprüft werden. Aus der so gebildeten weiteren Zustandsgleichung

$$p = \frac{RT}{v} + \frac{b}{T^2(v+c)} - \frac{a}{T v(v+c)} \quad (27)$$

ergibt sich nach Gl. (1):

$$\Delta U = \frac{2A}{T_s} \int \left(\frac{a}{v(v+c)} - \frac{b}{v^2(v+c)} \right) dv$$

und nach Ausführung der Integration:

$$\Delta U = \frac{2A}{T_s} \left\{ \frac{a}{c} \ln \left(\frac{-v}{v+c} \right) - \frac{b}{c^2} \left[\ln \left(\frac{v+c}{v} \right) - \frac{c}{v} \right] \right\}_1^2. \quad (28)$$

Gl. (27) geht für Stoffe mit $k \neq 3$ (wegen $c = v_k(k-3) = 0$) in Gl. (22) über, die also nur einen speziellen Fall der allgemeinen Gl. (27) darstellt.

Für Kohlensäure ergeben sich die Konstanten der Zustandsgleichung (27) wie folgt:

$$a = 5.25 v_k^2 p_k T_k, \quad b = v_k^3 p_k T_k \quad \text{und} \quad c = 0.623 v_k.$$

Die dimensionslose Form von Gl. (27) lautet für CO_2 :

$$p_x = 3.63 \frac{T_x}{v_x} + \frac{1}{T_x v_x^3 (v_x + 0.623)} - \frac{5.25}{T_x v_x (v_x + 0.623)}. \quad (27a)$$

Für $T_x = 0.9$ (Rechnungsbeispiel I) erhält man daraus für verschiedene Volumina $v_x = v/v_k$ die in Tab. 1 angeführten reduzierten Drücke $p_x = p/p_k$, bzw. den Isothermenverlauf (c) in Abb. 1.

Wie aus Abb. 1 ersichtlich, stimmt hier das Flüssigkeitsvolumen v_x' mit dem Dampftafelwert überein; der durch Planimetrieren ermittelte Dampfdruck ist hin-

³ Pfaff: Berechnung thermischer Eigenschaften von Flüssigkeiten und Dämpfen. Forsch. Ingenieurwes. (1940).

⁴ Landolt-Börnstein: Physikalisch-chemische Tabellen, II. Bd., S. 1475. Berlin: Springer-Verlag. 1923.

gegen etwas größer und das Dampfvolumen v_x'' kleiner als der betreffende Erfahrungswert. Für $v_x > 0.8$ ist der Kurvenverlauf mit dem aus Gl. (3) berechneten zusammenfallend. Mit den angegebenen Konstanten erhält man aus Gl. (28) für CO_2 :

$$\Delta U = 2 A p_k v_k \left(\frac{T_k}{T_s} \right) \left\{ \log \text{nat} \frac{v_x'' (v_x' + 0.623)}{v_x' (v_x'' + 0.623)} (8.425 + 2.571) + 1.605 \left(\frac{1}{v_x''} - \frac{1}{v_x'} \right) \right\}. \quad (29)$$

Mit $v_x'' = 4.82$ und $v_x' = 0.5025$ wird die innere Verdampfungswärme q für das Rechnungsbeispiel I nach Gl. (29):

$$q = 8.43 \{ 11 \cdot 0.686 - 2.86 \} = 8.43 \cdot 4.68 = 39.6 \text{ kcal/kg.}$$

Gl. (27) ergibt also für q dasselbe Resultat wie Gl. (3).

6. Die Zustandsformel als Gleichgewichtsbedingung.

Ein grundsätzlich anderes Verfahren zur Ermittlung der Verdampfungswärmen geht von der Annahme aus, daß die Zustandsformel eine Gleichgewichtsbedingung darstellt, wonach in einer ruhenden Flüssigkeit der äußere Druck p und der „Kohäsionsdruck“ den abstoßenden molekularen Kräften, also dem thermischen (und molekularen) Abstoßungsdruck das Gleichgewicht halten müssen. Auf Grund solcher Vorstellungen ist auch die Waalssche Zustandsgleichung (1873) entstanden.

So lautet z. B. Gl. (27), als Gleichgewichtsbedingung angeschrieben:

$$p + \frac{a}{T v (v + c)} = \frac{R T}{v} + \frac{b}{T v^2 (v + c)}. \quad (27)$$

Multipliziert man alle Glieder mit dv und integriert bei konstanter Temperatur, so wird:

$$\int_1^2 p dv + \frac{a}{T} \int_1^2 \frac{dv}{v (v + c)} = R T \int_1^2 \frac{dv}{v} + \frac{b}{T} \int_1^2 \frac{dv}{v^2 (v + c)}. \quad (30)$$

Auf den Verdampfungsvorgang angewendet, stellt das erste Glied die äußere Verdampfungswärme dar. Das zweite Glied stellt den Arbeitsaufwand zur Überwindung der Kohäsion und das Glied 4 die gleichzeitig erfolgende Arbeitsleistung der molekularen Abstoßungskräfte dar. Die Zunahme ΔU_1 der potentiellen Energie U_1 der Moleküle während der Verdampfung beträgt somit:

$$\Delta U_1 = \frac{A}{T} \int_1^2 \left(\frac{a}{v (v + c)} - \frac{b}{v^2 (v + c)} \right) dv. \quad (31)$$

Nimmt man weiter an, daß die „intramolekulare“ Energie U_2 (potentielle, Rotations- und Schwingungsenergie) trotz konstanter Temperatur bei der Verdampfung nicht gleichbleibt, sondern z. B. wegen Dissoziation der Moleküle usw. zunimmt, so wird

$$q = \Delta U_1 + \Delta U_2. \quad (32)$$

Nach Gl. (31) wäre ΔU_1 nur die Hälfte des früher aus Gl. (27) mit Hilfe von Gl. (1) für q ermittelten Wertes. Dies bedeutet, daß bei der Verdampfung die in Gl. (31) nicht erfaßte (oder nicht zum Ausdruck kommende) „intramolekulare“ Energie U_2 (z. B. durch den Rückgang der Assoziation) auch nach der Zustandsgleichung (27) beträchtlich gestiegen ist.

Aus Gl. (27), (31) und (32) ergibt sich nun für die Verdampfungswärme $r = q + \psi$ die einfache Beziehung:

$$r = A R T \int_1^2 \frac{dv}{v} + \Delta U_2 = A R T_s \ln \left(\frac{v''}{v'} \right) + \Delta U_2, \quad (33)$$

aus der sich ΔU_2 berechnen läßt, wenn r bekannt ist. Der Beziehung (33) kommt deshalb allgemeinere Bedeutung zu, weil sie von den drei rechtsstehenden Gliedern der Zustandsgleichung nur das erste (das thermische Abstoßungsglied) enthält, das

bei allen richtig gebauten theoretischen Zustandsformeln gleich, nämlich RT/v bzw. $RT/(v - b)$ lautet, während die Form der weiteren Glieder auf die Beziehung (33) keinen Einfluß hat. Hierzu sei bemerkt, daß das „Kovolumen“ (b) bei van der Waals und Berthelot mit $1/3$ bzw. $1/4 v_k$ vermutlich zu groß gewählt ist, aber kleinere Werte von b/v_k (0.1 bis 0.15) wohl in Frage kämen.

Für Helium (Rechnungsbeispiel III) mit $k = 3.03$ ist bei 1 ata: $R = 848/4 = 212$, $T_s = 4.26^\circ \text{K}$, $v''/v' = 11.51/0.552 = 20.9$, $\ln 20.9 = 3.04$ und r nach Gl. (33):

$$r = \frac{212 \cdot 4.26 \cdot 3.04}{427} + \Delta U_2 = 6.43 + \Delta U_2.$$

Mit dem Erfahrungswert⁴ von $r = 6 \text{ kcal/kg}$ würde sich also für ΔU_2 ein kleiner negativer Wert (-0.43) ergeben.

Für das Rechnungsbeispiel I (0°C -Isotherme der Kohlensäure) erhält man aus Gl. (33):

$$r = \frac{19.27}{427} \cdot 273.16 \cdot \ln \frac{10.383}{1.081} = 28.3 + \Delta U_2 [\text{kcal/kg}]$$

und

$$\Delta U_2 = 56.13 - 28.3 = 27.83 \text{ kcal/kg}.$$

Für das Rechnungsbeispiel II (H_2O -Isotherme für 309.5°C) ergibt sich:

$$r = \frac{47.1 \cdot 582.6}{427} \ln \frac{5.92}{0.476} + \Delta U_2 = 161.5 + \Delta U_2,$$

so daß $\Delta U_2 = 310.7 - 161.5 = 149.2 \text{ kcal/kg}$ wäre.

7. Berechnung von r und q aus der dimensionslosen Form der Zustandsgleichung.

Schreibt man Gl. (7) in der Form

$$\left(\frac{r}{A p_k v_k} \right) = \int_1^2 \left(\frac{T}{T_k} \right) \left[\frac{\partial \left(\frac{p}{p_k} \right)}{\partial \left(\frac{T}{T_k} \right)} \right] d \left(\frac{v}{v_k} \right), \quad (34)$$

so stehen rechts vom Gleichheitszeichen nur reduzierte oder dimensionslose Größen.

Der Ausdruck $\left(\frac{r}{A p_k v_k} \right)$ muß daher ebenfalls eine dimensionslose oder reine Zahl sein und soll im folgenden als „dimensionslose Verdampfungswärme“ (r_x) bezeichnet werden. Die Dimensionslosigkeit dieser Größe geht auch aus nachstehender Dimensionsformel hervor:

$$[r_x] = \left[\frac{r}{A p_k v_k} \right] = \left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] = \left[\frac{\text{kg}^2 \text{m}^3}{\text{kg}^2 \text{m}^3} \right] = [1].$$

Nach Gl. (7) wird für $T_x = \text{konst.}$:

$$r_x = T_x \int_1^2 \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{v_x} dv_x, \quad (35)$$

wonach r_x aus der dimensionslosen oder reduzierten Form einer beliebigen Zustandsgleichung in einfacher Weise berechnet werden kann.

Aus Gl. (35) folgt zunächst, daß die dimensionslose Verdampfungswärme r_x für eine bestimmte reduzierte Temperatur T_x für alle Stoffe gleich sein müßte, wenn man die Gültigkeit des Korrespondenzgesetzes voraussetzt, da in diesem Falle für alle Stoffe nur eine einzige (dimensionslose) Zustandsgleichung gelten würde.

Statt $p_k v_k$ kann man in Gl. (34) wegen $k = \frac{R T_k}{p_k v_k}$ auch $\frac{R T_k}{k}$ setzen, so daß r_x aus

$$r_x = \frac{r k}{A R T_k} \quad (36)$$

in einfacher Weise gefunden wird, wenn die Verdampfungswärme r , die kritische Temperatur T_k und der kritische Koeffizient k gegeben sind.

So beträgt z. B. r_x bei $T_x = T/T_k = 0.9$ für Wasserdampf mit $r = 310.8$ kcal/kg, $k = 4.45$, $T_k = 374 + 273 = 647^\circ \text{K}$ und $R = 47.1$:

$$r_x = \frac{310.8 \cdot 4.45 \cdot 427}{647 \cdot 47.1} = 0.062 \cdot 310.8 = 19.38$$

und für Kohlensäure mit $r = 56.13$, $k = 3.63$, $T_k = 304.1^\circ \text{K}$ und $R = 19.27$:

$$r_x = \frac{(56.15) 3.63 \cdot 427}{304.1 \cdot 19.27} = 0.264 \cdot 56.15 = 14.87.$$

Für H_2O , CO_2 und NH_3 ist der Verlauf von r_x über T_x in Abb. 2 gezeigt. Aus diesen Beispielen ergibt sich schon, daß das erwähnte Korrespondenzgesetz nur näherungsweise zutrifft und die Zustandsgleichung $p = f(T, v)$ nicht für alle Stoffe dieselbe reduzierte Form haben kann.

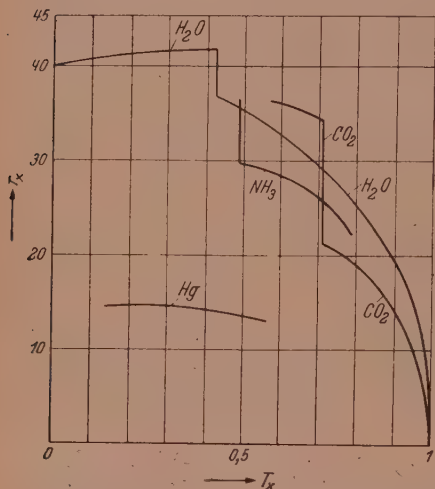


Abb. 2. Dimensionslose Verdampfungswärmen in Abhängigkeit von der reduzierten Temperatur T_x .

Die dimensionslose Zustandsgleichung muß vielmehr von Stoff zu Stoff verschieden lauten, wenn sie nicht nur qualitativ, sondern auch zahlenmäßig besser entsprechen soll. Solche Zustandsformeln ergeben sich, wenn die verschiedene Größe des kritischen Koeffizienten k , sei es⁵ durch Konstantenvermehrung oder² durch Einführung des veränderlichen Molekulargewichtes μ , berücksichtigt wird.

Das zweite Verfahren² geht von einer Zustandsgleichung für Stoffe mit $k = 3$ [z. B. Gl. (22)] aus. Das erste Glied rechts wird mit einem von T_x und v_x abhängigen Faktor multipliziert, der die Abnahme des scheinbaren (oder physikalischen) Molekulargewichtes durch Dissoziation beim Übergang vom kritischen in den Gaszustand berücksichtigen soll.

Als Beispiel für eine derartige Zustandsgleichung sei folgende Beziehung angeführt:

$$p_x = \frac{3 T_x}{v_x} \left[1 + \frac{(k-3)}{3} e^{\frac{\epsilon}{T_x^4 v_x^{-1}}} \right] + \frac{\vartheta_1}{v_x^3} - \frac{3 \vartheta_2}{v_x^2} \quad (22 \text{ I})$$

Die Temperaturfunktionen des zweiten und dritten Gliedes rechts lauten z. B.:

$$\vartheta_1 = \gamma + (k-2) e^{-\frac{\tau}{T_x}} \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = \alpha - (k-2) \beta e^{-\frac{\tau}{T_x}},$$

wobei für Wasserdampf $\tau = 2.3025$, $k = 4.407$, $\beta = 2$, $\alpha = 1.4814$, $\gamma = 0.7593$ und $\epsilon = 2.509$ zu setzen wäre.

Analog Gl. (35) erhält man für die dimensionslose innere Verdampfungswärme q_x die Beziehung:

$$q_x = \int_1^2 \left[T_x \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{v_x} - p_x \right] dv_x \quad (37)$$

wobei q_x wieder aus $\frac{q}{A p_k v_k} = \frac{q k}{A R T_k}$ zu berechnen ist.

So beträgt z. B. q_x für Wasserdampf und $T_x = 0.9$ mit $q = 271.8$ kcal/kg

$$q_x = \frac{271.8 \cdot 4.45 \cdot 427}{647 \cdot 47.1} = 16.95,$$

⁵ Über eine besondere Form der Zustandsgleichung. Akad. Wiss. Wien, Akad. Anz. Nr. 11 (1943).

hingegen für CO_2 und $T_x = 0.9$ mit dem Dampftafelwert von $\varrho = 48.38$:

$$\varrho_x = \frac{48.38 \cdot 3.63 \cdot 427}{304.1 \cdot 19.27} = 12.8.$$

Nach Gl. (37) läßt sich nun ϱ_x auch aus der dimensionslosen Zustandsgleichung (27a) für CO_2 berechnen, was aber hier entfallen kann, da das nachstehende Resultat auch aus Gl. (29) hervorgeht:

$$\varrho_x = \frac{2}{T_x} \left\{ 11 \ln \frac{v_x'' (v_x' + 0.623)}{v_x' (v_x'' + 0.623)} + 1.605 \left(\frac{1}{v_x''} - \frac{1}{v_x'} \right) \right\},$$

$$\varrho_x = \frac{2}{0.9} \cdot 4.68 = 10.4.$$

Statt aus Gl. (27a) kann man ϱ_x für CO_2 auch aus der (nicht angeschriebenen) dimensionslosen Form von Gl. (3) bestimmen und bekommt wieder:

$$\varrho_x = \frac{2}{T_x} \left\{ \frac{6.88}{0.63} \ln 1.993 + 1.605 \left(\frac{1}{v_x''} - \frac{1}{v_x'} \right) \right\},$$

$$\varrho_x = \frac{2}{0.9} (7.56 - 2.86) = 10.4.$$

Für Wasserdampf (Rechnungsbeispiel II) wird hingegen nach Gl. (9) bzw. Gl. (3):

$$\varrho_x = \frac{2}{0.9} \left\{ 7 \ln 3.24 + 0.693 \left(\frac{1}{5.92} - \frac{1}{0.476} \right) \right\},$$

$$\varrho_x = \frac{2}{0.9} (8.225 - 1.34) = 15.3,$$

wobei allerdings die Volumina v_x' und v_x'' nicht aus der Zustandsgleichung bestimmt, sondern aus der Dampftafel entnommen wurden.

Aus vorstehenden Beispielen ist aber zu erkennen, daß sich aus Gl. (3) bzw. (27a) für die Stoffe H_2O und CO_2 verschiedene und den Erfahrungswerten näherkommende Zahlen für ϱ_x ergeben, so daß die Einführung des kritischen Koeffizienten in die Zustandsgleichung⁵ auch in dieser Hinsicht eine Verbesserung bedeutet.

Gl. (35) läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\frac{r_x}{T_x} = \int_1^2 \left(\frac{\partial p_x}{\partial T_x} \right)_{v_x} dv_x. \quad (35a)$$

Die dimensionslose Größe r_x/T_x (die als „dimensionslose Verdampfungsentropie“ bezeichnet werden könnte) müßte nach dem Korrespondenzprinzip bei einer bestimmten reduzierten Temperatur T_x für alle Stoffe denselben Wert haben, nach Gl. (3) und (27a) jedoch nur von der Kennzahl k abhängig sein.

Nach Gl. (36) ist ferner:

$$\frac{r_x}{T_x} = \frac{r k T_k}{A R T_k T_s}$$

und mit $R = 848/\mu$:

$$\frac{r_x}{T_x} = \frac{r k \mu}{A 848 T_s} \quad \text{oder:} \quad \frac{\mu r}{T_s} = \left(\frac{r_x}{T_x} \right) A \cdot 848 \cdot \frac{1}{k}, \quad (38)$$

wobei μ [kg/kMol] das physikalische Molekulargewicht und $\mu r/T_s$ die „molekulare Verdampfungsentropie“ bedeutet.

Bei strenger Gültigkeit des Korrespondenzprinzips müßte nun sowohl (r_x/T_x) (nur eine Form der dimensionslosen Zustandsgleichung ist gültig!) als auch der kritische Koeffizient k für alle Stoffe (und eine bestimmte reduzierte Temperatur T_x) gleich groß sein, so daß nach Gl. (38) (für gleiches T_x) auch die Größe $\mu r/T_s$ konstant sein müßte.

Nach Gl. (3) und (27a) hingegen (also bei Berücksichtigung des kritischen Koeffizienten in der Zustandsgleichung) ist die „molekulare Verdampfungsentropie“ (für ein bestimmtes T_x) je nach Größe der Kennzahl k von Stoff zu Stoff verschieden, d. h. die Annäherung verbessert.

Die reduzierte Siedetemperatur bei 1 Atm. ($T_{s(1 \text{ Atm.})}$) liegt für die meisten Flüssigkeiten zwischen 0.55 und 0.7. In diesem Temperaturbereich muß offenbar r_x/T_x nach der streng gültigen Beziehung (38) dem kritischen Koeffizienten k proportional sein, wenn sich nach der „Troutonschen Regel“ für $\mu r/T_{s(1 \text{ Atm.})}$ und viele Stoffe ein ähnlicher Wert (im Mittel etwa 20.8) ergibt. Betrachtet man, wie an anderer Stelle⁶ abgeleitet, die „Troutonsche Zahl“ $\mu r/T_{s(1 \text{ Atm.})}$ als dimensionslos, so wird auch die im Wärmemaß ausgedrückte molare Gaskonstante $A \cdot 848 = 848/427 = 1.985$ dimensionslos.⁷

8. Einfluß der Temperaturabhängigkeit der zwei letzten Glieder auf q_x .

Wie bereits erwähnt, wird der nach Gl. (37) berechnete Wert von q_x von der Temperaturabhängigkeit der beiden letzten Glieder stark beeinflusst, was z. B. an Gl. (27a) gezeigt werden soll.

Bezeichnet man die dimensionslosen Konstanten dieser Gleichung mit α , β , γ (wobei $\beta = 1$ ist) und setzt statt $1/T_x'$ beliebige Temperaturfunktionen ϑ_{1x} und ϑ_{2x} ein, so wird

$$p_x = k \frac{T_x}{v_x} + \frac{\vartheta_{1x}}{v_x^2(v + \gamma)} - \frac{\alpha \vartheta_{2x}}{v_x(v_x + \gamma)}, \quad (39)$$

wobei z. B. für CO_2 $\alpha = 5.25$, $k = 3.63$ und $\gamma = 0.623$ ist. Nach Gl. (37) und (39) wird die dimensionslose innere Verdampfungswärme:

$$q_x = \int_1^2 \left[\frac{k T_x}{v_x} + \frac{\vartheta_{1x}' T_x}{v_x^2(v_x + \gamma)} - \frac{\alpha \vartheta_{2x}' T_x}{v_x(v_x + \gamma)} - \frac{k T_x}{v_x} - \frac{\vartheta_{1x}}{v_x^2(v_x + \gamma)} + \frac{\alpha \vartheta_{2x}}{v_x(v_x + \gamma)} \right] dv_x$$

oder

$$q_x = \int_1^2 \left[\frac{\vartheta_{1x}' T_x - \vartheta_{1x}}{v_x^2(v_x + \gamma)} - \frac{\alpha (\vartheta_{2x}' T_x - \vartheta_{2x})}{v_x(v_x + \gamma)} \right] dv_x. \quad (40)$$

Die einfachste, dem wirklichen Verhalten bei reduzierten Temperaturen von 1 bis 0.8 wenigstens ungefähr entsprechende (und daher auch in dieser Arbeit bisher verwendete) Temperaturfunktion ist

$$\vartheta_{1x} = \vartheta_{2x} = 1/T_x.$$

Darnach wird:

$$\vartheta_{1x}' = \left(\frac{d\vartheta_{1x}}{dT_x} \right) = - \frac{1}{T_x^2}$$

und Gl. (40) nimmt die einfache Form an:

$$q_x = \frac{2}{T_x} \int_1^2 \left[\frac{\alpha}{(v_x + \gamma) v_x} - \frac{1}{(v_x + \gamma) v_x^2} \right] dv_x, \quad (41)$$

was für CO_2 und $T_x = 0.9$ nach Durchführung der Integration wieder den Wert 10.4 ergibt. Die allgemeinere Gl. (40) lautet hingegen nach Durchführung der Integration:

$$q_x = - \frac{\alpha}{\gamma} \ln \frac{v_x''(v_x' + \gamma)}{v_x'(v_x'' + \gamma)} (\vartheta_{2x}' T_x - \vartheta_{2x}) + \left[\frac{1}{\gamma^2} \ln \frac{v_x'(v_x'' + \gamma)}{v_x''(v_x' + \gamma)} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{v_x''} - \frac{1}{v_x'} \right) \right] (\vartheta_{1x}' T_x - \vartheta_{1x}) \quad (42)$$

oder im besonderen für CO_2 und das Rechnungsbeispiel I:

$$q_x = 5.78 (0.9 \vartheta_{2x}' - \vartheta_{2x}) + 1.10 (0.9 \vartheta_{1x}' - \vartheta_{1x}). \quad (43)$$

⁶ Dimensionslose Größen in der Wärmelehre. Wärme S. 117 (1941).

⁷ Zur Frage der Temperaturdimension. Österr. Ingenieur-Arch. Bd. I, H. 1/2 (1946).

Läßt man z. B. $\vartheta_{2x} = 1/T_x$ bestehen, setzt aber T_{1x} (die Temperaturfunktion des „Abstoßungsgliedes“) mit $T_x^{-0.5}$ fest, so wird $\vartheta_{1x}' = -0.5 T_x^{-1.5}$ und

$$\vartheta_{1x}' T_x - \vartheta_{1x} = -1.5 \cdot T_x^{-0.5} = -1.58.$$

Damit wird

$$\varrho_x = 5.78 \cdot \frac{2}{0.9} - 1.58 \cdot 1.1 = 12.85 - 1.74 = \underline{11.11}.$$

Macht man das Abstoßungsglied überhaupt temperaturunabhängig (setzt also den Exponenten von T_x in ϑ_{1x} gleich Null), so wird $\vartheta_{1x} = 1$, $\vartheta_{1x}' = 0$ und $\varrho_x = 12.85 - 1.1 = 11.75$ (gegenüber 10.4 mit $\vartheta_{1x} = 1/T_x$).

Auch Ausdrücke von der Form $a + b T_x^n$ oder $a - b T_x^n$ usw. kommen als Temperaturfunktionen in Frage, wenn sie bei der kritischen Temperatur $T_x = 1$ den Wert 1 annehmen und einigen weiteren im Aufsatz² genannten Bedingungen genügen.

Durch Änderung der Temperaturfunktionen wird natürlich auch der Isothermenverlauf, die Dampfspannung, das Dampf- und Flüssigkeitsvolumen geändert, so daß der Isothermenverlauf neu berechnet, aufgezeichnet und überprüft werden muß. Zur empirischen Feststellung der beiden Temperaturfunktionen ϑ_{1x} und ϑ_{2x} kann man für verschiedene Siedetemperaturen T_{sx} und Drücke p_{sx} die zugehörigen Volumina v_x' und v_x'' aus der Dampftafel entnehmen und in die Zustandsformel einsetzen. Auf diese Weise erhält man jeweils zwei Gleichungen mit den beiden Temperaturfunktionen als Unbekannten, so daß der Verlauf dieser Funktionen über T_x verzeichnet und (wenn möglich) durch eine mathematische Formel ersetzt werden kann. Vgl. z. B. die in der Arbeit³ in Abb. 2 gezeigte Temperaturfunktion.

Aus solchen empirisch ermittelten Temperaturfunktionen muß sich aber keineswegs ein richtiger Isothermenverlauf im homogenen und überhitzten Gebiet ergeben, so daß das Verfahren in erster Linie zur Überprüfung der zugrunde gelegten Zustandsformel für $T_x = 1$, d. h. für die kritische Temperatur geeignet ist.

Zusammenfassung.

Auf Grund einer bekannten, aus dem I. und II. Hauptsatz folgenden Beziehung wird versucht, die Verdampfungswärmen r , ϱ und ψ aus der Zustandsgleichung zu berechnen.

Wie die Untersuchung von fünf verschiedenen Fällen ergibt, lassen sich aber derzeit wegen der Unzulänglichkeit der bekannten Zustandsgleichungen nur Näherungswerte mit zum Teil großen Abweichungen erzielen, so daß das Rechenverfahren eher umgekehrt zur Überprüfung von Zustandsformeln geeignet ist. Es zeigt sich aber andererseits, daß die Annäherung durch Einführung des kritischen Koeffizienten in die Zustandsgleichung⁵ erheblich verbessert wird, wobei der Temperaturabhängigkeit des Kohäsions- und Abstoßungsgliedes besondere Bedeutung zukommt.

(Eingegangen am 18. Juni 1946.)

Neues Verfahren zur Präzisions-Gitterkonstantenbestimmung.*

Von A. Neth, Wien.

Mit 7 Textabbildungen.

Einführung.

Bei der Präzisionsbestimmung von Gitterkonstanten kompakter Materialien, wie sie in der Metallkunde bei der Untersuchung von Löslichkeitsgrenzen, beim Studium von Ausscheidungsvorgängen und ähnlichen Problemen durchgeführt werden, ergeben sich hauptsächlich in zwei Fällen Schwierigkeiten bei der Untersuchung, nämlich beim Auftreten von Grobkorngefüge sowie beim Vorhandensein elastischer Eigenspannungen.

Beim Vorliegen von Grobkorngefüge ist die Anzahl der reflektierenden Kristallite so klein, daß die Debye-Scherrer-Linien in einzelne Punkte aufgelöst sind, die aber nicht auf einer Linie liegen, sondern mehr oder weniger um eine ideale Lage streuen. Dieser Effekt läßt sich nach F. Regler auf die Brechung der Röntgenstrahlen beim Eintritt in das bzw. beim Austritt aus dem Korn zurückführen.¹ Es ist einleuchtend, daß die Vermessung von Aufnahmen, die diese Erscheinung zeigen, nicht mit der erforderlichen Genauigkeit durchgeführt werden kann. Bis jetzt hat man sich so geholfen, daß man das Probestück entlang einer größeren Fläche untersucht hat, derart, daß man Probestück und Aufnahmekamera unter Wahrung des gegenseitigen Abstandes gegeneinander während der Aufnahme bewegt. Bei diesem Verfahren, welches als „Abpinselverfahren“² bekannt ist, wird eine größere Fläche der untersuchten Substanz vom Primärstrahl abgepinselt, wodurch die Zahl der reflektierenden Kristalle vermehrt wird und die Schwierigkeiten bei der Vermessung der Aufnahme behoben sind.

Der zweite Umstand, der bei Nichtbeachtung zu erheblichen Fälschungen des Meßergebnisses führen kann, ist das Auftreten von Eigenspannungen erster Art. Solche Spannungen können beispielsweise als Abkühlspannungen beim Guß oder durch Volumsveränderungen zufolge Gefügeumwandlung entstehen. Auch als Restspannungen nach bleibender Verformung treten sie auf. Sie können unter Umständen erhebliche Größe annehmen und die Streckgrenze des Materials erreichen, wie das Auftreten von Spannungsrissen in Materialien, die abgeschreckt wurden, beweist. Die hierdurch bedingten Gitterverformungen erreichen häufig einen beträchtlichen Wert. Abgeschreckte Proben einer Aluminiumlegierung wiesen beispielsweise Eigenspannungen auf, die die Netzebenenabstände des Aluminiumgitters bereits um zwei Einheiten der dritten Dezimalstelle beeinflussten.

Es sind bereits Verfahren bekannt, die es gestatten, auch an verspannten Proben die Gitterkonstante für den spannungsfreien Zustand, den sog. Nullwert der Gitterkonstanten, zu bestimmen. Diese Verfahren haben sich aus den Methoden der röntgenographischen Spannungsmessung entwickelt.³ Man kombiniert bei diesen Verfahren mehrere Aufnahmen, die unter verschiedenen Richtungen zur Oberfläche

* Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist bereits in der deutschen Patentanmeldung D 92766 vom Mai 1944, bei der der Verfasser als Erfinder genannt ist, enthalten.

Die vorliegende Arbeit wurde im Jänner 1945 vom Dr. Georg Lüttke-Verlag, Berlin-Pankow, zur Veröffentlichung in der Zeitschrift Metallwirtschaft angenommen, ist aber wegen Verlustes des Manuskriptes während der Kampfhandlungen bis jetzt noch nicht im Druck erschienen.

¹ F. Regler: Metallwirtsch., Metallwiss., Metalltechn. **21**, Nr. 17/18, 249—255 (1942).

² F. Regler: Z. Metallkunde **35**, Nr. 10, 202—205 (1943).

³ R. Glocker: „Verfahren und Einrichtungen zur röntgenographischen Spannungsmessung“ im Handbuch der Werkstoffprüfung von E. Siebel, S. 589—611. Berlin: Springer-Verlag. 1940.

des Probestückes hergestellt werden. Verwendet werden in den meisten Fällen eine Senkrecht- und zwei Schrägaufnahmen unter einem Winkel von 45° gegen das Oberflächenlot, die sich im Azimut um 90° unterscheiden, sonst aber beliebig gelegen sind. Man erhält bei diesem Verfahren neben dem Nullwert der Gitterkonstanten auch die Größe der Spannungskomponenten. Werden diese aber nicht benötigt, wie es bei Legierungsuntersuchungen meist der Fall ist, erscheint der meßtechnische Aufwand zu groß, da drei Aufnahmen herzustellen und auszuwerten sind.

Besonders groß wird der experimentelle Aufwand, wenn Proben vorliegen, die gleichzeitig Grobkorngefüge und Eigenspannungen aufweisen. In diesem Falle müssen nämlich die drei Aufnahmen unter gleichzeitiger Anwendung des Abpinselverfahrens hergestellt werden. Das neue Verfahren, das im folgenden beschrieben werden soll, erlaubt hingegen die Bestimmung des Nullwertes der Gitterkonstanten aus einer einzigen Aufnahme und hat ferner den Vorteil, daß es auch bei Grobkorngefüge anwendbar ist.

Beschreibung des neuen Verfahrens.

Die versuchstechnische Durchführung des neuen Verfahrens ist denkbar einfach und aus der schematischen Darstellung in Abb. 1 zu ersehen. Von der Probe wird unter einem schrägen Winkel eine einzige Rückstrahlaufnahme hergestellt, bei der das Präparat um das Oberflächenlot als Achse gleichmäßig gedreht wird. In der schematischen Darstellung ist als Aufnahmekamera eine fokussierende Reglersche Kegelkamera gewählt. Es kann natürlich jedes beliebige Rückstrahlverfahren Verwendung finden, also auch etwa das Planfilm-, Zylinderfilm- oder das Reglersche Ringfilmverfahren.⁴

Die Kamera besteht aus dem kegelförmigen Filmträger und aus der Blendenanordnung, die das Primärstrahlenbündel ausblendet. Das Probestück, eine vielkristalline Platte, dreht sich um eine Achse, die durch den Auftreffpunkt des Primärstrahlenbündels geht und senkrecht zur Oberfläche liegt. Drehachse und Primärstrahlrichtung bilden miteinander einen spitzen Winkel. In der Abbildung sind ferner die Konturen des Debye-Scherrer-Kegels eingezeichnet, der den Film entlang der Interferenzlinie schneidet.

Durch diese Versuchsanordnung wird zweierlei erreicht: Zunächst wird die Anzahl der beugenden Kristallite erhöht und daher eine ähnliche Wirkung erzielt wie beim Abpinselverfahren. Ferner läßt sich der Einfluß etwaiger Spannungen auf das Ergebnis der Gitterkonstantenbestimmung ausschalten. Durch das Drehen des Probestückes werden nämlich alle Kristallite erfaßt, deren Netzebenennormalen mit der Oberflächenrichtung den gleichen Winkel einschließen, die aber verschieden gegen die verformende Kraft der Eigenspannungen liegen und demnach verschieden stark verformt sind. Durch Aufnahme aller dieser Kristallite auf einen Film erfolgt eine Mittelwertbildung über alle erfaßten Kristalle. Bei Wahl eines geeigneten Einstrahlwinkels erreicht man nun, daß der Mittelwert den Nullwert der Gitterkonstante ergibt. Es ist also möglich, mit Hilfe der beschriebenen Anordnung die Gitterkonstante aus

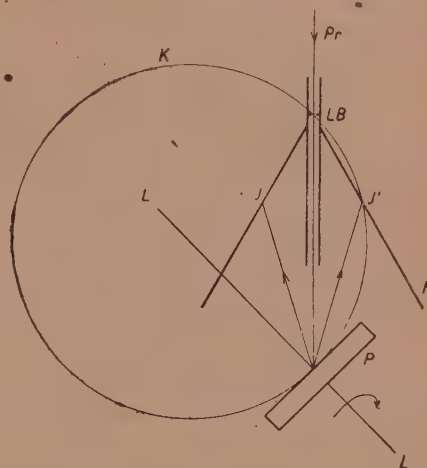


Abb. 1. Schematische Darstellung des neuen Schrägdrehverfahrens. *F* Kegelstrahl, — *LB* Lochblende, — *Pr* Primärstrahl, — *P* Präparat, — *LL* Drehachse, gleichzeitig Oberflächenlot durch den Auftreffpunkt des Primärstrahles, — *I* Interferenzlinie, — *K* Fokussierungskugel.

⁴ F. Regler: Z. techn. Physik 24, 291—296 (1943).

einer einzigen Aufnahme zu bestimmen, gleichgültig wie groß etwa auftretende Spannungen sein mögen oder welche Richtung sie haben.

Vermehrung der beugenden Kristallite.

Wir haben oben behauptet, daß durch das Drehen der Probe um eine Drehachse, die schräg zur Primärstrahlenrichtung liegt, die Anzahl der reflektierenden Kristallite gegenüber der ruhenden Aufnahme erhöht wird, wodurch eine ähnliche Wirkung wie beim Abpinselverfahren erzielt werden kann.

Um abzuschätzen, wievielmals mehr Kristallite bei gedrehter Probe beugen als bei ruhender Probe, seien die beiden Abb. 2 und 3 gegenübergestellt. In beiden Fällen nimmt das Präparat gegenüber der Primärstrahlrichtung eine Schräglage ein. Nur

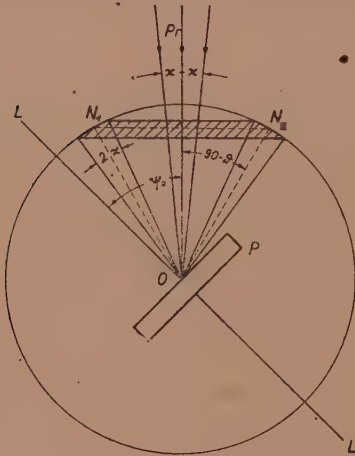


Abb. 2. Lage der Netzebenenormalen der beugenden Kristallite bei ruhender Probe. 2κ Konvergenz des Primärstrahlenbündels, — ϑ Bragg'scher Glanzwinkel, — ψ_0 Einstrahlwinkel.

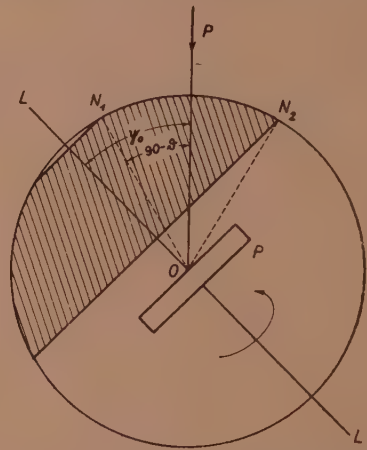


Abb. 3. Lage der Netzebenenormalen der beugenden Kristallite bei gedrehter Probe.

ist in Abb. 2 das Präparat ruhend angenommen, während es in Abb. 3 um das Oberflächenlot als Achse drehend gedacht ist. Um den Auftreffpunkt des Primärstrahlenbündels auf die Oberfläche der Probe denken wir uns in beiden Fällen die Lagekugel gezeichnet.

Wir wollen annehmen, daß eine regellose Orientierung der einzelnen Kristallite der Präparatplatte vorliege. In diesem Falle durchstoßen die Netzebenenormalen einer betrachteten Netzebenenschar die Lagekugel im Mittel gleichmäßig. Von allen betrachteten Kristalliten kommen nur diejenigen zur Reflexion, deren Netzebenenormalen mit dem Primärstrahl den Bragg'schen Glanzwinkel einschließen. Nimmt man ein unendlich dünnes Primärstrahlenbündel an, so erkennt man, daß nur sehr wenige Kristallite einen Beitrag zur Interferenzlinie geben, da es sehr unwahrscheinlich ist, daß eine Netzebenenormale mit dem Primärstrahl genau den Winkel η einschließt. In der schematischen Darstellung wurde deshalb die Annahme gemacht, daß das Primärstrahlenbündel eine gewisse Konvergenz, die durch die Blendenanordnung gegeben ist, aufweist. Dadurch wird den tatsächlichen Verhältnissen besser Rechnung getragen. Wir wollen den Konvergenzwinkel der beiden äußersten Strahlen des Primärstrahlenbündels mit 2κ bezeichnen.

Die Ausstichpunkte der Netzebenenormalen, die mit mindestens einem Strahl des konvergenten Primärstrahlenbündels den Winkel $90 - \vartheta$ einschließen, liegen bei der ruhenden Probe sämtlich in der schraffierten schmalen Kugelzone. Von allen Kristalliten, die vom Primärstrahlenbündel getroffen werden, liefert daher nur der

Bruchteil einen Beitrag zur Interferenzlinie, deren Netzebenennormale in den schraffierten Bereich fallen. Die Fläche des schraffierten Bereiches ins Verhältnis gesetzt zur Gesamtfläche der Lagekugel, gibt ein Maß für diese Anzahl. Die Kugelzone errechnet sich aus dem Glanzwinkel und der Konvergenz in elementärer Weise zu:

$$F_1 = 4 \pi \cos \vartheta \sin \kappa. \quad (1)$$

In der Anordnung der nächsten Abbildung dreht sich die Probe um das Oberflächenlot. Es ist ohneweiters zu erkennen, daß nunmehr alle Kristallite, deren Netzebenennormalen in den breiten schraffierten Bereich fallen, durch das Drehen der Probe mindestens einmal während einer Umdrehung in eine beugungsfähige Lage kommen. Auch hier ist die Fläche der schraffierten Kugelzone ein Maß für den Bruchteil der beugenden Kristallite zur Gesamtzahl. Die Fläche der breiten schraffierten Zone errechnet sich hier zu:

$$F_2 = 4 \pi \sin \psi_0 \cos \vartheta, \quad (2)$$

wobei ψ_0 den Winkel zwischen Primärstrahl und Oberflächenlot bedeutet. Das Verhältnis der beiden Flächen ergibt eine Maßzahl dafür, wievielmals mehr Kristallite bei gedrehter Probe zur Beugung gelangen als bei ruhender Probe:

$$V = \frac{\sin \psi_0}{\sin \kappa}, \quad (3)$$

unabhängig vom Glanzwinkel ϑ . Durch das Drehen können daher keine Fälschungen des Intensitätsverhältnisses der einzelnen Interferenzlinien zueinander auftreten. Die Abpinselfwirkung durch das Drehen kommt allen Interferenzlinien im gleichen Maße zugute.

Wir wollen diesen Faktor für Verhältnisse, wie sie bei der tatsächlichen Herstellung von Rückstrahlaufnahmen auftreten, zahlenmäßig berechnen. Bei einer Lochblende von 0.5 mm Durchmesser und einem Abstand derselben vom Präparat von 60 mm errechnet sich der mittlere Konvergenzwinkel zu ungefähr 0.0083. Wählen wir einen Einstrahlwinkel $\psi_0 = 45^\circ$, so ergibt sich, daß ungefähr 170mal mehr Kristallite bei der Drehaufnahme zur Beugung herangezogen werden als bei der Aufnahme mit ruhender Probe.

Nimmt man ferner an, daß bei der ruhenden Probe ungefähr ein Bereich von $5 \times 5 \text{ mm}^2$ von der Röntgenstrahlung getroffen wird, so müßte, um dieselbe Wirkung durch Abpinseln zu erreichen, eine Präparatplatte von ungefähr $65 \times 65 \text{ mm}^2$ abgepinselt werden. Beim Abpinseln über eine derart große Fläche ergeben sich erfahrungsgemäß bereits Schwierigkeiten bei der Einhaltung des Abstandes der Probe von der Kamera. Außerdem besteht die Gefahr, daß lokale Unterschiede in der Zusammensetzung der Probe durch das Abpinseln verwischt werden. Auch ist es höchst unwahrscheinlich, daß der Spannungszustand des Probestückes auf dieser großen Fläche homogen ist, wie es zur erfolgreichen Durchführung der Präzisions-Gitterkonstantenbestimmung notwendig wäre. Das neue Verfahren erfordert hingegen bei seiner Anwendung nur einen kleinen Oberflächenbereich, wodurch sich die Möglichkeit von punktwisen Untersuchungen auch an grobkörnigen Substanzen ergibt.

Die oben durchgeführte Rechnung soll nur größenordnungsmäßige Anhaltspunkte ergeben und erhebt durchaus keinen Anspruch auf Exaktheit, da Einflüsse, die sicherlich eine Rolle spielen, wie Korngröße der Probe, Eindringtiefe der Strahlung, Divergenz der Strahlung usw., keine Berücksichtigung fanden. Da die angeführten Einflüsse sich bei ruhender und gedrehter Probe aber im gleichen Maße auswirken, fallen sie bei der Quotientenbildung heraus. Die Verhältniszahl V dürfte die Größenordnung der Wirksamkeit des neuen Verfahrens in bezug auf Vermehrung der beugenden Kristallite deshalb ziemlich gut wiedergeben.

Elastizitätstheoretische Berechnungen.

Wir berechnen den Mittelwert der spezifischen Dehnungen aller Kristallite, deren Netzebenennormalen mit dem Oberflächenlot den Winkel ψ einschließen und die unter dem Einfluß von Oberflächenspannungen stehen.

Die Dehnungen in den Hauptrichtungen, welche mit den Richtungen der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sowie mit der Richtung der Oberflächennormalen zusammenfallen, errechnen sich aus den Hauptspannungen und den Elastizitätszahlen E und μ folgendermaßen:³

$$\left. \begin{aligned} E \varepsilon_1 &= \sigma_1 - \mu \sigma_2, \\ E \varepsilon_2 &= \sigma_2 - \mu \sigma_1, \\ E \varepsilon_3 &= -\mu (\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Bekanntlich verschwindet in der Oberfläche die Normalspannungskomponente σ_3 senkrecht zur Oberfläche. Die Dehnung in einer beliebigen Richtung, die etwa durch das Azimut φ der Projektion der betrachteten Dehnungsrichtung mit der Hauptspannungskomponente σ_1 sowie durch ψ , dem Winkel mit dem Oberflächenlot, gegeben ist, ergibt sich aus den drei Hauptdehnungen folgendermaßen:

$$\varepsilon_{\varphi\psi} = \sin^2 \psi [\varepsilon_1 \cos^2 \varphi + \varepsilon_2 \sin^2 \varphi] + \varepsilon_3 \cos^2 \psi. \quad (5)$$

Um den Mittelwert der spezifischen Dehnungen aller Kristallite zu berechnen, deren Netzebenennormalen mit dem Oberflächenlot den Winkel ψ einschließen, müssen wir Gl. (5) über φ integrieren und durch 2π dividieren. Der Integrationsbereich ist von 0 bis 2π zu erstrecken, da die Probe eine volle Umdrehung ausführen soll. Für den Mittelwert der Dehnungen ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\varepsilon_{M\psi} = \sin^2 \psi \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \varepsilon_3 \cos^2 \psi. \quad (6)$$

Aus dem Gleichungstriplet (4) läßt sich unschwer die Summe der Hauptdehnungen in der Oberfläche durch die Dehnung senkrecht dazu ausdrücken:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -\frac{1-\mu}{\mu} \varepsilon_3. \quad (7)$$

Mit Hilfe dieses Ausdruckes ergibt sich der gesuchte Dehnungsmittelwert zu:

$$\varepsilon_{M\psi} = \left[-\frac{1-\mu}{2\mu} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \right] \varepsilon_3. \quad (8)$$

Wir erkennen, daß bei geeigneter Wahl des Einstrahlwinkels ψ dieser Mittelwert unabhängig von der Dehnung ε_3 wird. Setzen wir den Klammerausdruck in Gl. (8) gleich 0, so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für den Winkel ψ .

$$\tan^2 \psi = \frac{2\mu}{1-\mu}. \quad (9)$$

Der Mittelwert aller Dehnungen in den Richtungen, die mit dem Oberflächenlot den Winkel ψ gemäß Gl. (9) einschließen, ist Null. Da sich die Dehnungen aus den Netzebenenabständen definitionsgemäß folgendermaßen errechnet:

$$\varepsilon_{M\psi} = \frac{d_{M\psi} - d_0}{d_0}, \quad (10)$$

erkennt man sofort, daß man durch die angegebene Mittelwertbildung den Netzebenenabstand d_0 für den spannungsfreien Zustand erhält.

In der Kurventafel der Abb. 4 ist der durch Gl. (9) beschriebene Zusammenhang des Einstrahlwinkels mit der Querdehnungszahl graphisch dargestellt. Für den gesamten Bereich der in Frage kommenden Querdehnungszahlen liegt der Winkel ψ zwischen 35 und 50°. Die Querdehnungszahlen aller bekannten Stoffe liegen nämlich etwa zwischen 0.2 bis 0.4.

Der Winkel, der bei der Untersuchung einzuhalten ist, hängt also nur von der Größe der Querdehnungszahl oder Poissonschen Konstanten ab.

Bei der Festlegung des tatsächlichen Einstrahlwinkels ist ebenso wie bei der röntgenographischen Spannungsmessung zu beachten, daß die Richtung der gemessenen Dehnung nicht identisch ist mit der Einstrahlrichtung, sondern daß sie mit der Netzebenennormalen der reflektierenden Netzebenenschar zusammenfällt. Zu dem nach Gl. (9) gefundenen Wert des Winkels ψ ist also entweder der Winkel η , das ist der Komplementwinkel des Glanzwinkels ϑ , hinzuzufügen oder davon abzuziehen, um den Einstrahlwinkel ψ_0 , das heißt den Winkel, den der Primärstrahl mit dem Lot der Probe einschließen muß, zu erhalten, je nachdem, ob der präparatfernere Teil I_1 oder der präparatnähere Teil I_2 der Interferenzlinien zur Ausmessung verwendet wird.

Zur näheren Erläuterung diene die Abb. 5. Das Präparat ist wieder mit P bezeichnet, die Drehachse,

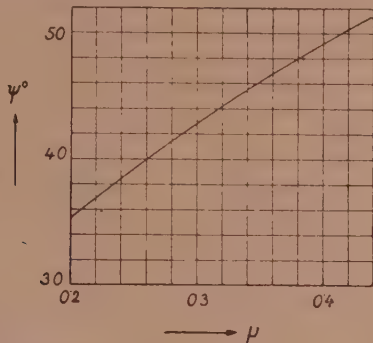


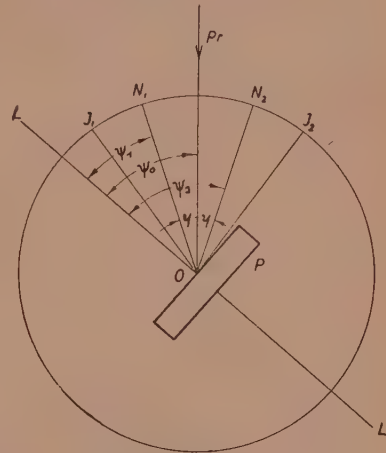
Abb. 4. Einstrahlwinkel als Funktion der Poissonschen Konstanten.

welche ja bekanntlich mit dem Oberflächenlot y Komplementwinkel des Bragg-
desselben zusammenfallen soll, mit LL , der Primär-
strahl, welcher in der Umgebung des Drehpunktes auftreten möge, heißt Pr .
schen Glanzwinkels.

Wieder sei um den Punkt 0 die Lagekugel gezeichnet. I_1 und I_2 stellen die Lage des Debye-Scherrer-Kreises der betrachteten Netzebenenschar dar. Der Debye-Scherrer-Kreis ist als Kreis mit dem Mittelpunkt M , das ist der Durchstoßpunkt des Primärstrahls mit der Lagekugel, zu denken. Die Netzebenennormalen aller Kristallite, die einen Beitrag zum Debye-Scherrer-Kreis $I_1 I_2$ liefern, liegen auf dem Kreis $N_1 N_2$, ebenfalls mit M als Mittelpunkt. N stellt bekanntlich die Winkelhalbierende zwischen Primärstrahl und gebeugtem Strahl I dar. Der Winkel η zwischen M und N errechnet sich aus dem Braggschen Glanzwinkel einfach als Komplement desselben:

$$\eta = 90 - \vartheta.$$

Welchen Teil der Interferenzlinie man zur Ausmessung heranzieht, hängt davon ab, welches Aufnahmeverfahren verwendet wird. Es ist nämlich bei Verwendung des Fokussierungsprinzipes im allgemeinen nicht möglich, bei schrägem Einstrahlen die gesamte Interferenzlinie gleichmäßig scharf auf den Film aufzuzeichnen. Man erkennt aus Abb. 1, daß es bei Verwendung einer gleichseitigen Kegelkamera leichter ist, auf die präparatnäheren Teile der Interferenzlinie I scharf einzustellen. Bei Verwendung einer Planfilmkamera beispielsweise ist es hingegen günstiger, auf den präparatfernere Teil der Interferenzlinie einzustellen. Bei schrägem Einstrahlen nimmt nämlich die sog. Fokussierungskugel, das ist die Kugel, die durch die Loch-



blende des Blendensystems geht und das Präparat im Auftreffpunkt des Primärstrahlenbündels berührt, eine unsymmetrische Lage gegenüber der Primärstrahlung ein und es ist einleuchtend, daß bei Verwendung von rotationssymmetrischen Film-anordnungen nur die Teile der Interferenzlinien scharf sein können, welche in der Nähe des Schnittes der Fokussierungskugel mit dem Film liegen.

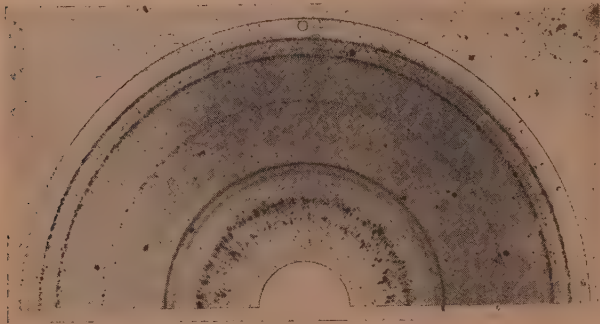


Abb. 6. Kegelrückstrahlaufnahme einer grobkörnigen Reinsilberprobe mit $Ni-K$ -Strahlung, ruhendes Präparat. Das homogene $K-\alpha$ -Dublett stammt vom Molybdänpulver, das als Eichsubstanz in dünner Schichte auf das Präparat aufgeschlemmt wurde.



Abb. 7. Aufnahme der Probe von Abb. 6 nach dem neuen Schrägdrehverfahren.

Versuchsergebnisse.

Aus dem Versuchsmaterial, das bei der Erprobung der praktischen Brauchbarkeit des neuen Verfahrens gewonnen wurde, seien zunächst zwei Aufnahmen herausgegriffen, die in besonders eindrucksvoller Weise die Abpinselwirkung des neuen Verfahrens zeigen. Abb. 6 und Abb. 7 stellen Kegelrückstrahlaufnahmen ein und derselben grobkörnigen Silberprobe dar. Die Aufnahme in Abb. 6 erfolgte mit ruhender Probe, während die Aufnahme in Abb. 7 mit gedrehter Probe hergestellt wurde.

Zur Herstellung der Aufnahmen wurde eine fokussierende Kegelrückstrahlkamera verwendet. Die Probe, ein geglühtes Stückchen gewalztes Silberblech, wurde auf die Basis eines Metallzylinders von ungefähr 20 mm geklebt, in dessen axialer Bohrung die Achse eines langsam laufenden Motors gesteckt wurde. Der Einstrahlwinkel betrug 45° .

Die Einstellung des gewünschten Präparat-Kameraabstandes erfolgte mit Hilfe eines vom Verfasser gemeinsam mit F. Regler, Freiberg/Sachs., entwickelten optischen Einstellgerätes. Dieses Gerät, das im Grunde genommen aus einem Mikroskop mit abgewinkeltem Strahlengang besteht, wurde an Stelle der Kamera in die hierfür vorgesehene Halterung, welche an der Röhrenhaube der Röntgenröhre befestigt ist, eingesetzt. Durch Bewegen der Probe in den Tiefenschärfebereich des Mikroskops konnte der vorgegebene Abstand sehr genau eingestellt werden. Mit dem beschriebenen optischen Einstellgerät ist es auch möglich zu kontrollieren, wie weit der Drehpunkt der Probe mit der Mitte des Primärstrahlenbündels zusammenfällt.

Die Aufnahme in Abb. 6 zeigt deutlich den bereits von Regler beschriebenen Effekt der Punktestreuung zufolge Brechung der Röntgenstrahlen an den Korngrenzen der vorliegenden Probe. Die Aufnahme der Abb. 7 zeigt einwandfrei, wie durch das beschriebene neue Verfahren homogene Interferenzen erzeugt werden können. Es ist ferner ersichtlich, daß die Debye-Scherrer-Linien nicht entlang ihres ganzen Umfanges gleichmäßig scharf sind. Dies ist, wie oben erläutert wurde, darauf zurückzuführen, daß die Fokussierungskugel eine exzentrische Lage zum Film einnimmt.

Übersteigt die Korngröße einen bestimmten Wert, so kann es vorkommen, daß die Interferenzen eine streifige Struktur zeigen, wie dies in Abb. 7 in beginnendem Maße zu erkennen ist. Liegt aber der Drehpunkt der Probe genau an der Stelle, an der das Primärstrahlenbündel die Oberfläche der Probe trifft, so stört diese Erscheinung im allgemeinen bei der Auswertung der Aufnahme nicht.

Um zu erproben, ob das Verfahren auch beim Vorliegen von Spannungen in den Präparaten den richtigen Nullwert der Gitterkonstanten liefert, wurden an einer größeren Zahl von künstlich verspannten Proben Untersuchungen durchgeführt, von denen nur drei Beispiele angeführt werden sollen.

1. Eine Platte aus kaltgewalztem Reinaluminium von den Abmessungen $50 \times 80 \times 6 \text{ mm}^3$ wurde einer Biegebeanspruchung unterworfen. In der Mitte der Platte wurde ein Stahlstäbchen unterlegt und an den Enden dieselbe mit einer Schraube niedergespannt. Der Spannungszustand in der Mitte war ein ungefähr einachsiger Spannungszustand mit Zugbeanspruchung. Die Größe der Hauptspannungskomponenten in der Längs- und Querrichtung der Platte wurde nach dem Glockerschen Verfahren³ ermittelt. In der Längsrichtung ergab sich ein Wert $\sigma_l = 5.6 \text{ kg/mm}^2$, in der Querrichtung ein solcher zu $\sigma_q = 0.3 \text{ kg pro mm}^2$.

Benützt man die Glockerschen Formeln zur Berechnung des Nullwertes der Gitterkonstanten aus den drei Aufnahmen, so erhält man $a_0 = 4.0411 \text{ Å}$, ein Wert, der auch an der spannungsfreien Probe durch Herstellung einer Senkrechtaufnahme gefunden wurde.

Eine Planfilmrückstrahlaufnahme nach dem neuen Verfahren lieferte den Wert 4.0411 Å für a_0 , aus dem man eine ganz vorzügliche Übereinstimmung erkennt. Der Einstrahlwinkel ψ_0 war $36^\circ 15'$, entsprechend einer elastischen Querdehnungszahl des Aluminiums $\mu = 0.34$ und einem Glanzwinkel $\vartheta = 81^\circ 14'$ bei der (333) Reflexion. Verwendet wurde Cu-Strahlung und eine offene Röntgenröhre Seemannscher Bauart.

2. Bei diesem Beispiel wurde in ähnlicher Weise wie oben ein Eisenplättchen mit den Abmessungen $14 \times 30 \times 1 \text{ mm}^3$, das durch zweistündiges Glühen bei 600° C spannungsfrei gemacht worden war, einer Biegebeanspruchung unterworfen. Eine Schrägdrehaufnahme bei einem Einstrahlwinkel von $\psi_0 = 37.5^\circ$, entsprechend einer elastischen Querdehnungszahl $\mu = 0.37$ und einem Glanzwinkel $\vartheta = 80.5^\circ$ ergaben einen Nullwert $a_0 = 2.8609 \text{ Å}$, in guter Übereinstimmung mit dem Wert, der an der spannungsfreien Probe gewonnen wurde.

Die Linien waren bei den beiden letzten Aufnahmen etwas verbreitert. Dies erklärt sich daraus, daß die zur Beugung herangezogenen Kristallite keine einheitlichen Netzebenenabstände aufwiesen, da der Spannungszustand der Proben kein rotationssymmetrischer war. Die Linien waren aber für die Vermessung noch genügend scharf.

3. Eine kreisförmige Platte aus Reinsilber, durch zweistündiges Glühen im Wasserstoffstrom spannungsfrei gemacht, wurde an den Rändern gefaßt und in der Mitte mit Hilfe einer Stahlkugel gedrückt. Die der Stahlkugel gegenüberliegende Seite der Probe wies einen allseitigen Zugspannungszustand auf. Von der Probe wurde hiernach eine Schrägdrehaufnahme hergestellt, wobei eine fokussierende Planfilmkamera sowie eine Röntgenröhre mit Nickelanode Verwendung fand. Als Eichpulver wurde Molybdän verwendet. Als Einstrahlwinkel wurde $\psi_0 = 42^\circ 40'$, entsprechend der Querdehnungszahl des Silbers von $\mu = 0.37$ gewählt. Auch hier stimmt der gefundene Nullwert der Gitterkonstante $a_0 = 4.0775 \text{ Å}$ an der verspannten Probe vollkommen überein mit dem Wert, der an der spannungsfreien Probe gemessen wurde. Die Bezugstemperatur war 20° C .

Zusammenfassung.

Ein neues röntgenographisches Rückstrahlverfahren zur Präzisionsmessung von Gitterkonstanten vielkristalliner kompakter Proben wird beschrieben. Das Verfahren besteht darin, daß von der Probe eine Schrägaufnahme hergestellt wird, bei der die Probe um das Oberflächenlot als Achse gleichmäßig gedreht wird.

Es wird gezeigt, daß durch das beschriebene Verfahren die Anzahl der beugenden Kristallite erheblich vermehrt werden kann. Es wird durch das neue Verfahren eine ähnliche Wirkung wie beim bekannten Abpinselverfahren erzielt. Demzufolge bietet das neue Verfahren Vorteile bei der Untersuchung grobkristalliner Stoffe.

Durch Wahl eines geeigneten Einstrahlwinkels, der sich aus der elastischen Querdehnungszahl errechnen läßt, erhält man nach dem neuen Verfahren aus einer einzigen Aufnahme den sog. Nullwert der Gitterkonstanten der Probe, unabhängig davon, welche Größe und Richtung etwaige Spannungen in der Probe auch haben mögen. Zufolge dieser Eigenschaft erweist sich das neue Verfahren als besonders wertvoll für die Untersuchung von Legierungsproben, die Eigenspannungen aufweisen.

An Hand von Beispielen wird die Durchführung solcher Aufnahmen beschrieben und die Brauchbarkeit des neuen Verfahrens bewiesen.

(Eingegangen am 23. Juni 1946.)

Sphärische Aberration dünner Einzellinsen nach D. Argentieri.

Von H. Watzlawek, Fritzens, Tirol.

Mit 2 Textabbildungen.

1. Einleitung.

Ein elegantes, an Kürze kaum übertreffbares System der geometrischen Optik hat Prof. Dr. Argentieri in seinem Werke *Ottica Industriale*¹ veröffentlicht. Dieses für die optischen Industrien bedeutsame Werk ermöglicht es, außerordentlich viel Zeit an Durchrechnungen zu sparen und ferner statt trigonometrisches „Probieren“ zielbewußte analytische Lösungsansätze durchzuführen. Da dieses Werk im Gebiet deutscher Sprache allgemein nicht bekannt ist, soll nun im Fall der sphärischen Aberration dünner Einzellinsen die Überlegenheit des Argentierisystems gezeigt werden, sowie dessen Zusammenhang mit bisher in Gebrauch stehenden Systemen.

2. Grundgleichungen.

Im Gebiet paraxialer Strahlen lautet die Schnittweitengleichung für eine dünne Linse

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$

und die Brennweitengleichung

$$\frac{1}{f} = \varphi = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2)$$

Gl. (2) in Gl. (1) eingesetzt, ergibt $\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f}$ oder die Brechkraft

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}. \quad (3) \text{ (Arg. 1)}$$

¹ D. Argentieri: *Ottica Industriale*, U. Hoepli, Mailand 1942. Referate: Z. Instrumentenkde. 62, 238—240 (1942); Zeiss-Nachr. (4) H. 5, 126—128 (1942).

Weiters folgt leicht:

$$\frac{\varphi}{n-1} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}. \quad (4) \text{ (Arg. 2)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} &= \frac{2}{s} + \frac{1}{f} = \frac{2}{s} + \varphi = \psi, \\ \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} &= \frac{2}{s'} - \frac{1}{f} = \frac{2}{s'} - \varphi = \psi. \end{aligned} \right\} \quad (5) \text{ (Arg. 3)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} &= \frac{\varphi}{n-1} + 2 \frac{1}{r_2} = \frac{\psi - \frac{2}{s}}{n-1} + 2 \frac{1}{r_2} = \\ &= \frac{\psi}{n-1} + 2 \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{s(n-1)} \right] = \psi + \mu. \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\psi \left[\frac{1}{n-1} - 1 \right] + 2 \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{s(n-1)} \right] = \psi \frac{2-n}{n-1} + 2 \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{s(n-1)} \right] = \mu. \quad (6) \text{ (Arg. 4)}$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \psi + \mu. \quad (7) \text{ (Arg. 5)}$$

Mit Hilfe der Argentierikonstanten

$$A_0 = \frac{n+2}{n}, \quad B_0 = \frac{n}{n-1}, \quad C_0 = \frac{n+1}{n} \quad (8)$$

erhält man für Gl. (6) die Form:

$$\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{s'} - \psi B_0 + \frac{2}{r_2} = \mu. \quad (6a) \text{ (Arg. 4a)}$$

Argentieri bezeichnet, ψ als die „Lagengröße“ der Linse, „ μ “ als die „Formgröße“ der Linse. Es interessiert nun, die Radien durch die Schnittweiten, Brechkräfte und Form der Linse ausgedrückt zu erhalten. Dies gelingt leicht mit Hilfe der Gl. (4) und (7) und es ergibt sich:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{2} [\mu + B_0 \varphi] \quad (9) \text{ (Arg. 6)}$$

und

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{2} [\mu - B_0 \varphi]. \quad (9a) \text{ (Arg. 6a)}$$

3. Sphärische Aberration einer dünnen Linse.

Für den paraxialen Bereich erhält man allgemein mit endlichem Abstand des Gegenstandes den Ausdruck:²

$$(\Delta s') \Big|_{a \neq \infty} = \frac{b^2 h_1^2}{2(n-1)f} \left\{ n \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a \cdot b} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{2n+1}{k} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + \frac{n+2}{k^2} \right\}. \quad (10)$$

Hierin bedeuten: h_1 Einfallshöhe, a Gegenstandsweite, b Bildweite, f Brennweite, $k = b_1 = -a_2$ Gegenstandsweite für zweite brechende Fläche = Bildweite für erste brechende Fläche.

Für einen unendlich fernen Gegenstand $a = -s_1 = \infty$ erhält man hieraus

$$(\Delta s') \Big|_{-s_1 = a = \infty} = \frac{n f h_1^2}{2(n-1)^2} \left(\frac{n}{f^2} - \frac{2n+1}{k f} + \frac{n+2}{k^2} \right). \quad (10a)$$

Faßt man nun in der Funktion $(\Delta s') = F(k)$ die Größe „ k “ als Variable auf, dann kann man denjenigen Wert von k suchen, der $(\Delta s')$ zu einem Minimum macht, der

² A. Gleichen: Lehrbuch der geometrischen Optik, S. 116, Gl. (15). B. G. Teubner. 1902.

somit die günstigste Linsengestalt bestimmt. Die Auswertung dieser Minimalbedingung liefert die Beziehung:

$$\left. \frac{1}{k} \right|_{\text{Minimum}} = \frac{2n+1}{2(n+2)} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad (11)$$

und hiermit wird

$$\left. (\Delta s') \right|_{-s_1 = \infty \text{ Minimum}} = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2(n+2)} \cdot \frac{h_1^2}{f} = F_0(n) \cdot \frac{h_1^2}{f} = F_0(n) \cdot \varphi \cdot h_1^2 \quad (12)$$

oder mit Maßstabsänderung

$$\underline{(\Delta s') \cdot h_1 \cdot \varphi^2} = \underline{(\Delta s'')} = \left(\frac{h_1 \varphi}{2} \right)^3 \cdot \frac{n(4n-1)}{(n-1)^2(n+2)} = F_1(n) \cdot \left(\frac{h_1 \varphi}{2} \right)^3 \quad (12a)$$

Wird die Funktion $F_0(n)$ für verschiedene n -Werte ausgerechnet, dann erhält man Tab. 1 und Abb. 1.

Tab. 1.

n	1	$1.2 = \frac{6}{5}$	1.4	$1.5 = \frac{3}{2}$	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
$F_0(n)$ $-s_1 = \infty$	∞	4.45	1.478	$\frac{15}{14} = 1.071$	0.833	0.574	$\frac{7}{16} = 0.440$	0.355	0.295

Man erkennt deutlich, daß mit steigendem Brechungs-exponenten die Minimalaberration für einen unendlich fernen Gegenstand stark abnimmt.

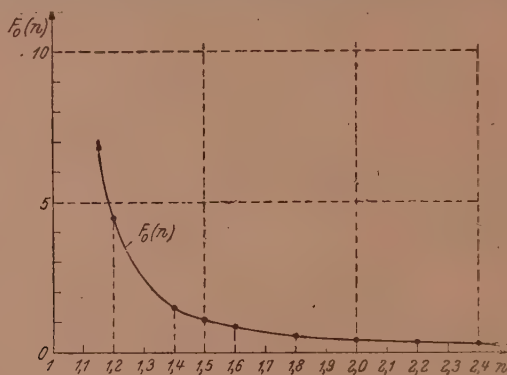


Abb. 1: Funktion $F_0(n) = \frac{n(4n-1)}{8(n-1)^2 \cdot (n+2)}$.

4. Gestalt der Linse mit der minimalsten sphärischen Aberration.

Im Paraxialgebiet gilt für eine dünne Linse mit den bisher angeführten Größen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{n}{k} &= \frac{n-1}{r_1} \\ \frac{n}{k} - \frac{1}{b} &= \frac{n-1}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Gestalt der Linse mit der minimalsten sphärischen Aberration findet man, wenn man den Wert k_{Minimum} aus Gl. (11) in Gl. (13) einsetzt und die Radien bestimmt. Diese Berechnung möge hier mit den Argentierikonstanten aus Gl. (8) durchgeführt werden, da diese den Arbeitsaufwand bereits wesentlich verkürzen. Später wird zum Vergleich eine viel elegantere Ableitung nach Argentieri gebracht. Es ist:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{r_1} = B_0 \left[\frac{1}{a} + \frac{C_0+1}{2A_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right]$$

daraus wird mit

$$\{./.\} = 2 A_0 (B_0 - 1) - B_0 (C_0 + 1) = - \frac{2 n^2 - n - 4}{n (n - 1)},$$

$$(./.) = B_0 (C_0 + 1) = + \frac{n (2 n + 1)}{n (n - 1)},$$

$$+ \frac{2 A_0}{r_1} = \frac{1}{a} \{./.\} + \frac{1}{b} (./.) = \frac{b \{./.\}^* + a (./.)}{a \cdot b} \quad (14a)$$

und

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{b} = B_0 \left[\frac{C_0 + 1}{2 A_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{b} \right]$$

und hieraus wird analog

$$- \frac{2 A_0}{r_2} = \frac{1}{b} \{./.\} + \frac{1}{a} (./.) = \frac{a \{./.\} + b (./.)}{a \cdot b} \quad (14b)$$

und für das gesuchte Radienverhältnis erhält man:

$$\frac{r_1}{r_2} = - \frac{a \{./.\} + b (./.)}{b \{./.\} + a (./.)} \quad (15)$$

und schließlich

$$\frac{r_1}{r_2} \Big|_{a \neq \infty} = - \frac{n (2 n + 1) b - (2 n^2 - n - 4) a}{n (2 n + 1) a - (2 n^2 - n - 4) b} \quad (16)$$

Tab. 2. $F_2(n)$ und r_2 für $r_1 = +1$.

n	1	1.2	1.4	$1.5 = \frac{3}{2}$	1.6
$F_2(n)$	— 1.0	— 0.568	— 0.278	$-\frac{1}{6} = -0.1666$	— 0.0714
$-s_1 = \infty$	— 1.0	— 0.568	— 0.278	$-\frac{1}{6} = -0.1666$	— 0.0714
r_2	— 1.0	— 1.76	— 3.6	— 6.0	— 14.0

n	1.68614	1.8	2.0	2.2	2.4
$F_2(n)$	0	+ 0.085	$+\frac{1}{5} = +0.20$	+ 0.291	+ 0.364
$-s_1 = \infty$	0	+ 0.085	$+\frac{1}{5} = +0.20$	+ 0.291	+ 0.364
r_2	$\mp \infty$	+ 11.78	+ 5.0	+ 3.44	+ 2.74

Tab. 3.

	$n =$					
	1.5		2.0		2.4	
Gestalt der Linse \rightarrow	$\frac{\varrho_1}{\varphi}$	$\frac{\varrho_2}{\varphi}$	$\frac{\varrho_1}{\varphi}$	$\frac{\varrho_2}{\varphi}$	$\frac{\varrho_1}{\varphi}$	$\frac{\varrho_2}{\varphi}$
Günstigste Linsenform	$+\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{1}{4}$	+ 1.124	+ 0.411
Sphärische Aberration $\frac{2 (\Delta s'')}{(h \varphi)^3}$	$+\frac{15}{7} = +0.214$		$+\frac{7}{8} = +0.875$		+ 0.590	
Konvexplane Linse	+ 2	± 0	+ 1	± 0	+ 0.70	± 0
Sphärische Aberration $\frac{2 (\Delta s'')}{(h \varphi)^3}$	$+\frac{7}{3} = +0.233$		+ 1		+ 0.91	

Für Spezialisierung für einen im Unendlichen befindlichen Gegenstand $a = -s_1 = \infty$ ergibt sich aus Gl. (15) durch Grenzwertbildung sofort

$$\left. \frac{r_1}{r_2} \right|_{-s_1=a=\infty} = -\frac{4+n-2n^2}{n(2n+1)} = F_2(n). \quad (17)$$

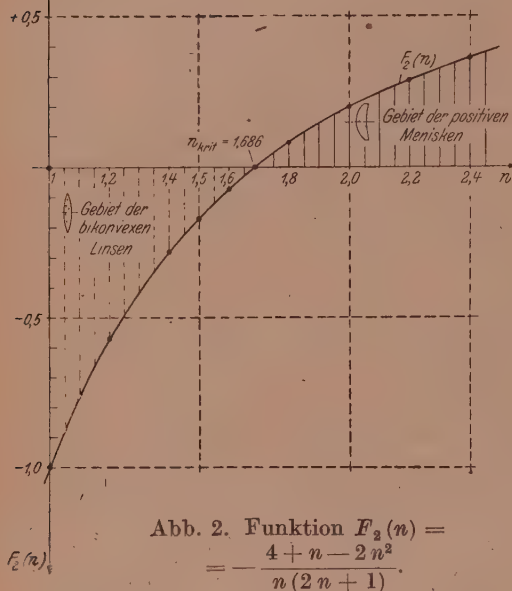


Abb. 2. Funktion $F_2(n) = \frac{4+n-2n^2}{n(2n+1)}$

Diese Beziehungen (16), (17) sind in der Literatur bekannt, sie wurden hier nochmals angegeben, um den späteren Vergleich, der die Eleganz des Argentierisystems klar erweist, besser hervortreten zu lassen. Die Tabellierung der Funktion $F_2(n)$ gibt Tab. 3 und deren graphische Darstellung Abb. 2.

Der Abb. 2 entnimmt man, daß für positive Werte der Funktion $F_2(n)$ nur positive Menisken mit $|+r_2| > |+r_1|$ und für negative Werte nur bikonvexe Linsen mit $|-r_2| > |+r_1|$ die möglichen Gestalten für geringste sphärische Aberration darstellen. Für $n = 1.68614$ ergibt sich eine konvexplane Linse. Für $n = 3/2 = 1.5$ haben wir eine bikonvexe Linse vor uns, deren Vorderradius r_1 sich zum Hinterradius r_2 verhält wie 1 : 6.

Um einen besseren Gestaltvergleich zu erhalten, kann man noch folgendermaßen vorgehen mit $1/r = q$:

$$\varphi = (n-1)(q_1 - q_2) = \frac{1}{f}, \quad (4a)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{x} = \frac{q_2}{q_1}, \quad (17a)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{q_1} = \frac{x-1}{x} (n-1) f, & \frac{q_1}{\varphi} &= \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{n-1}, \\ r_2 &= \frac{1}{q_2} = (x-1) (n-1) f, & \frac{q_2}{\varphi} &= \frac{1}{(x-1)(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Wertet man diese Beziehung (18) in Tabellenform aus, dann erhält man für die Brechungsindizes $n = 1.5, 2.0$ und 2.4 die Tab. 3.

Wird die sphärische Aberration ($\Delta s''$) der Linse günstigster Form gleich 1 gesetzt, dann erhält man mit zunehmendem Brechungsindizes die relative sphärische Aberration der konvexplanen Linse:

n	1.5	2.0	2.4
$\left[\frac{\text{Sphärische Aberration der konvexplanen Linse}}{\text{Sphärische Aberration der Linse günstigster Form}} \right] =$	1.089	0.875	0.649

Hieraus folgt, daß für einen n -Wert zwischen 1.5 und 2.0 die beiden Linsen der angegebenen Form bezüglich der sphärischen Aberration gleichwertig sind. Der fragliche n -Wert beträgt, wie bereits angegeben, $n_{\text{kritisch}} = 1.6814$, denn dafür wird nach Tab. 2 die Funktion $F_2(n) = 0$ und damit $r_2 = \infty$. Diese Tatsache wird später noch eleganter abgeleitet. Weiters erkennt man, daß noch für n nahe n_{kritisch} , der leichteren Her-

stellung wegen, praktisch für geringere Genauigkeitsansprüche die konvexplane Linse eine sehr gute Näherung darstellt.

Zur Ergänzung sei bemerkt, daß durch Auflösung der Minimumbedingung für ϱ der Simplet-Bedingungsgleichung:³

$$B_0^2 \varphi^3 - \varrho (A_0 B_0 + 1) + \varrho^2 A_0 = 0$$

sich ergibt

$$\varrho_{\text{Minimum}} = \frac{n}{2} \cdot \frac{2n+1}{n^2+n+2} \cdot \varphi$$

und damit für die Minimalaberration

$$(\Delta s'') = \left(\frac{h\varphi}{2} \right)^3 \cdot \frac{n(4n-1)}{(n-1)^2(n+2)} = F_1(n) \cdot \left(\frac{h\varphi}{2} \right)^3$$

in voller Übereinstimmung mit Gl. (12a).

5. Das Argentierisystem.

Nach Argentieri⁴ ist die sphärische Aberration proportional dem Ausdruck:

$$= \left(\frac{h_v}{h_1} \right)^4 \cdot \varphi [A_0 \mu^2 - 2\psi \mu + B_0^2 \varphi^2]. \quad (19) \text{ (Arg. 7)}$$

Es bedeuten: h_1 Einfallshöhe an der ersten Fläche, h_v Einfallshöhe an der v -ten Fläche.

Wir behandeln nun das Problem, die Form einer bikonvexen Linse zu finden, deren sphärische Aberration ein Minimum wird, in eleganter Weise. Dazu bilden wir $\frac{d(\Delta s'')}{d\mu} = 2A_0\mu - 2\psi$, und dies gleich Null gesetzt, liefert

$$\mu = \frac{\psi}{A_0} \quad (20) \text{ (Arg. 8)}$$

Für $-s_1 = a = \infty$ wird aus Gl. (5) für ψ der Wert $\psi = \varphi$ erhalten und dies in Gl. (20) eingesetzt, gibt:

$$\mu = \frac{\varphi}{A_0}, \quad \psi = \varphi. \quad (21) \text{ (Arg. 9)}$$

Um die Radien zu finden, setzen wir μ aus (20) in die Gl. (9), (9a) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{2} [\mu + B_0 \varphi] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_0} + B_0 \right] \varphi, \\ \frac{2}{r_1} &= \left[\frac{1}{A_0} + B_0 \right] \varphi. \end{aligned} \quad (22) \text{ (Arg. 10)}$$

Setzt man in diese Gleichung die Beziehung $\varphi = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ aus (2) ein, dann wird:

$$\begin{aligned} \frac{2}{r_1} &= (n-1) \left(\frac{1}{A_0} + B_0 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cdot \frac{r_2}{2}, \\ \frac{r_2}{r_1} &= \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{A_0} + B_0 \right) \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) = \left\{ \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{A_0} + B_0 \right) \right\} \frac{r_2}{r_1} - \left\{ \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{A_0} + B_0 \right) \right\}, \\ \frac{r_2}{r_1} [1 - \{./.\}] &= - \{./.\} \end{aligned}$$

mit

$$\{./.\} = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{A_0} + B_0 \right)$$

und weiters

$$\begin{aligned} \frac{\{./.\} - 1}{\{./.\}} &= \frac{r_1}{r_2} = 1 - \frac{1}{\{./.\}}, \\ \left. \frac{r_1}{r_2} \right|_{-s_1=a=\infty} &= 1 - \frac{2}{(n-1) \left(\frac{1}{A_0} + B_0 \right)}. \end{aligned} \quad (23) \text{ (Arg. 11)}$$

³ M. Berek: Grundlagen der praktischen Optik, S. 105. W. de Gruyter. 1930.

⁴ D. Argentieri: l. c. S. 28, Gl. (23).

Diese Gleichung muß, wenn das Argentierisystem zu Recht besteht, mit der Gl. (17) identisch sein! Beweis:

$$\frac{1}{A_0} + B_0 = \frac{n}{n+2} + \frac{n}{n-1} = n \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-1} \right) = n \frac{2n+1}{(n+2)(n-1)}$$

und damit

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{(n-1) \left(\frac{1}{A_0} + B_0 \right)} &= 1 - \frac{2}{(n-1) \cdot n \cdot \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)}} = \\ &= 1 - \frac{2n+4}{n(2n+1)} = -\frac{4+n-2n^2}{n(2n+1)} = F_2(n). \end{aligned} \quad (17)$$

Für das Beispiel einer bikonvexen Linse mit $n = 1.5$ erhält man:

$$\frac{1}{A_0} = \frac{3}{7}, \quad B_0 = 3, \quad \frac{r_1}{r_2} = 1 - \frac{7}{6} = -\frac{1}{6},$$

wie wir bereits früher erhielten. Mit wachsendem n von $n = 1$ an aufwärts, wächst auch der Radius r_2 und erreicht für

$$n_{\text{kritisch}} = \frac{1 + \sqrt{33}}{4} = 1.68614$$

den Wert $r_2 = \infty$, was aus Abb. 2 sofort zu ersehen ist. Somit haben wir den Fall vor uns, daß diese konvexplane Linse identisch ist mit jener in Tab. 3 angegebenen (s. S. 117).

6. Beziehungen zwischen Argentierisystem und den Systemen Clairaut-Schleiermacher und Coddington-Taylor.

a) Clairaut-Schleiermacher. In diesem, in deutschsprachigen Werken der geometrischen Optik üblichen System werden zwei Parameter definiert, und zwar der „Parameter der Lage“ $= \frac{1}{s'}$ und der „Parameter der Form“ $= \frac{1}{r'}$. Nach Schleiermacher ist die sphärische Aberration proportional folgendem Ausdruck

$$\begin{aligned} &= 4 \left(\frac{h_v}{h_1} \right)^4 \varphi \left[\left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \varphi^2 + \frac{3n+1}{n-1} \varphi \frac{1}{s'} + \frac{3n+2}{n} \left(\frac{1}{s'} \right)^2 - \frac{2n+1}{n-1} \varphi \frac{1}{r'} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(n+1)}{n} \frac{1}{s'} \cdot \frac{1}{r'} + \frac{n+2}{n} \left(\frac{1}{r'} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Dann wird nach Argentieri mit den Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{n+2}{n}, \quad B_0 = \frac{n}{n-1}, \quad C_0 = \frac{n+1}{n}, \quad B_0^2 = \left(\frac{n}{n-1} \right)^2, \\ 2 B_0 C_0 + 1 &= \frac{3n+1}{n-1}, \quad A_0 + 2 = \frac{3n+2}{n}, \\ 4 C_0 &= \frac{4(n+1)}{n}, \quad A_0 B_0 + 1 = \frac{2n+1}{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

erhalten

$$\begin{aligned} &= 4 \left(\frac{h_v}{h_1} \right)^4 \cdot \varphi \left[B_0^2 \cdot \varphi^2 + (2 B_0 C_0 + 1) \varphi \frac{1}{s'} + (A_0 + 2) \left(\frac{1}{s'} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (A_0 B_0 + 1) \varphi \frac{1}{r'} - 4 C_0 \frac{1}{s'} \cdot \frac{1}{r'} + A_0 \left(\frac{1}{r'} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (24a)$$

Mit $\psi = \frac{2}{s'} - \varphi$ aus (5) und $\mu = \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{s'} - \psi B_0 + \frac{2}{r_2}$ aus (6a) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{s'} - \left(\frac{2}{s'} - \varphi \right) B_0 + \frac{2}{r_2} &= \mu, \\ \frac{2}{s'} \left(\underbrace{\frac{1}{n-1} - B_0}_{-1} \right) + B_0 \varphi + \frac{2}{r_2} &= \mu, \end{aligned}$$

somit

$$\mu = \frac{2}{r'} - \frac{2}{s'} + B \varphi, \quad (26)$$

$$\psi = \frac{2}{s'} - \varphi. \quad (5)$$

Die Gl. (5) und (26) sind die Argentieri-Verbindungsgleichungen. Setzt man diese in die Argentiergleichung (19) ein, dann wird mittels:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 4 \left(\frac{1}{r'} \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{s'} \right)^2 + B_0^2 \varphi^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{r' s'} - 4 B_0 \varphi \frac{1}{s'} + 4 B_0 \varphi \frac{1}{r'} \\ \text{und} \quad -2 \psi \mu &= - \left(\frac{4}{s'} - 2 \varphi \right) \left(\frac{2}{r'} - \frac{2}{s'} + B_0 \varphi \right) = -4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{s' r'} + 4 \varphi \frac{1}{r'} + \\ &\quad + 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{s'} \right)^2 - 4 \varphi \frac{1}{s'} - 4 B_0 \varphi \frac{1}{s'} + 2 B_0 \varphi^2 \end{aligned}$$

für

$$\begin{aligned} (\Delta s') &= \left(\frac{h_v}{h_1} \right)^4 \cdot \varphi \left[B_0^2 \varphi^2 + 4 A_0 \left(\frac{1}{r'} \right)^2 + 4 A_0 \left(\frac{1}{s'} \right)^2 + A_0 B_0^2 \varphi^2 - 4 \cdot 2 \cdot A_0 \cdot \frac{1}{s' r'} - \right. \\ &\quad - 4 A_0 B_0 \varphi \frac{1}{s'} + 4 A_0 B_0 \varphi \cdot \frac{1}{r'} - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{s' r'} + 4 \varphi \frac{1}{r'} + \\ &\quad \left. + 4 \cdot 2 \left(\frac{1}{s'} \right)^2 - 4 \varphi \cdot \frac{1}{s'} - 4 B_0 \varphi \cdot \frac{1}{s'} + 2 B_0 \varphi^2 \right] = \\ &= \left(\frac{h_v}{h_1} \right)^4 \cdot \varphi \left[\varphi^2 (B_0^2 + A_0 B_0^2 + 2 B_0) - 4 \cdot \frac{1}{r' s'} \cdot (2 A_0 + 2) - \right. \\ &\quad - 4 (A_0 B_0 + B_0 + 1) \varphi \cdot \frac{1}{s'} - 4 (A_0 B_0 + 1) \varphi \frac{1}{r'} + \\ &\quad \left. + 4 (A_0 + 2) \left(\frac{1}{s'} \right)^2 + 4 A_0 \left(\frac{1}{r'} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Mit den Gleichungen

$$B_0^2 + A_0 B_0^2 + 2 B_0 = 4 B_0^2,$$

$$2 (A_0 + 1) = 4 \frac{n+1}{n} = 4 C_0,$$

$$A_0 B_0 + B_0 + 1 = 2 B_0 C_0 + 1$$

wird schließlich erhalten

$$\begin{aligned} (\Delta s') &= 4 \left(\frac{h_v}{h_1} \right)^4 \cdot \varphi \left[B_0^2 \varphi^2 + A_0 \left(\frac{1}{r'} \right)^2 + (A_0 + 2) \left(\frac{1}{s'} \right)^2 - 4 C_0 \frac{1}{s'} \cdot \frac{1}{r'} - \right. \\ &\quad \left. - (2 B_0 C_0 + 1) \varphi \cdot \frac{1}{s'} - (A_0 B_0 + 1) \varphi \frac{1}{r'} \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Der Vergleich zwischen den beiden Gl. (24a) und (27) ergibt deren Identität, damit ist die Gleichwertigkeit des Argentierisystems mit dem Schleiermacherschen bewiesen. Das Argentierisystem hat jedoch, wie man zur Genüge erkennt, den großen Vorteil einer hervorragenden Kürze und Eleganz vor allen anderen Systemen voraus. Man kann für diese Beweisführung auch noch von einer zweiten Variante ausgehen, und zwar dadurch, daß man für die Parameter wählt: „Parameter der Lage“ = $\frac{1}{s}$ und „Parameter der Form“ = $\frac{1}{r}$. In diesem Falle lauten die Argentieri-Verbindungsfunktionen:

$$\psi = \frac{2}{s} + \varphi, \quad (28)$$

$$\mu = \frac{2}{r} - \frac{2}{s} - B_0 \varphi. \quad (29)$$

Der Beweis erfolgt analog dem vorigen.

b) Coddington-Taylor. In diesem System bestehen die

$$\left. \begin{aligned} \text{„Parameter der Lage“} &= \pi = \frac{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{s'}} \\ \text{„Parameter der Form“} &= \sigma = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Damit lautet die Coddington-Taylorische Gleichung für die sphärische Aberration:

$$\Delta s' = \left(\frac{h_v}{h_1}\right)^4 \cdot \varphi \left[\frac{n+2}{n(n-1)^2} \sigma^2 + \frac{4(n+1)}{n(n+1)} \sigma \pi + \frac{3n+2}{n} \pi^2 + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \right]. \quad (31)$$

Nach Argentieri erhält man mit den Konstanten: A_0 , B_0 , C_0 und

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_0}{(n-1)^2} &= \frac{n+2}{n(n-1)^2}, & B_0^2 &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^2, \\ \frac{4C_0}{n-1} &= \frac{4(n+1)}{n(n-1)}, & A_0 + 2 &= \frac{3n+2}{n} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

die Gleichung:

$$= \left(\frac{h_v}{h_1}\right)^4 \cdot \varphi^3 \left[\frac{A_0}{(n-1)^2} \sigma^2 + \frac{4C_0}{n-1} \sigma \pi + (A_0 + 2) \pi^2 + B^2 \right]. \quad (33)$$

Die Argentieri-Verbindungsfunktionen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -\varphi \pi, \\ \mu &= \varphi \left(\frac{\sigma}{n-1} + \pi \right) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

womit der Beweis wie beim Schleiermacherschen System zu führen ist. Hierdurch ist das Argentierisystem auch an das von Coddington-Taylor angeschlossen. Auch hierbei beweist es seine Überlegenheit durch Kürze und Eleganz.

7. Zusammenfassung.

Es wurde mehrmals gezeigt, daß das Argentierisystem für die Berechnung der sphärischen Aberration eine außerordentliche Kürzung der Rechnung und eine Eleganz besitzt, wie es kein anderes System aufzuweisen hat.

Die Argentiergleichung (19) ist ebenfalls für mehrere Linsen anwendbar. Damit ein optisches System frei von sphärischer Aberration ist, muß nach Argentieri die Summe der sphärischen Aberrationen der Einzellinsen

$$\Sigma \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \quad (35)$$

einen sehr kleinen Wert geben, sie darf aber erfahrungsgemäß nicht identisch Null sein.

Argentieri hat für die anderen Bildfehler ähnliche einfach gebaute Ausdrücke aufgestellt, so daß durch Lösung eines kurzen Satzes von Bedingungsgleichungen sofort ein optisches System frei von den im Ansatz berücksichtigten Fehlern ist. Die Korrektur optischer Systeme erfolgt mittels Änderung der analytischen Ansatzgleichungen, nicht trigonometrisch. Die trigonometrische Durchrechnung behält nur den Wert einer genauen Überprüfung. Hierdurch besitzt dieses neue elegante, äußerst zeitsparende System eine ungeheure Bedeutung für die praktische industrielle Optik.

(Eingegangen am 6. September 1946.)

Untersuchungen über „gefährliche Flächen“ und „gefährliche Räume“ mittels des Aeroprojektors „Multiplex“.

Von J. Krames, Wien.

Mit 9 Textabbildungen.

In den nachfolgenden Zeilen wird über praktische Versuchsarbeiten berichtet, die der Verfasser im Laufe der Jahre 1941 bis 1944 anschließend an seine geometrischen Forschungen über die „gefährlichen Flächen“ der Luftphotogrammetrie¹ hauptsächlich im Institut für Geodäsie an der Technischen Hochschule in Wien ausgeführt hat. Für die freundliche Bereitstellung der hierfür benötigten Instrumente sei dem Vorstand dieses Institutes, Herrn o. ö. Professor Dr. Th. Dokulil, wärmstens gedankt. Ferner habe ich Herrn Ing. K. Killian für die unermüdliche Mithilfe bei der Durchführung der Versuche wie auch für verschiedene, den Gesichtspunkten der Praxis Rechnung tragende Anregungen meinen Dank auszusprechen.

Es zeigte sich vor allem, daß das beobachtete Verhalten der aufgenommenen Bildpaare von „gefährlichen Flächen“ mit deren durch theoretische Überlegungen klargestellten Eigenschaften durchwegs in Einklang steht, sowie, daß das erwartete „freie Spiel“ der mechanischen Einpassung erstaunlich groß wird, sobald zwei nur wenig voneinander abweichende Lösungen der Hauptaufgabe in Frage kommen. Darüber hinaus war diesen Versuchen noch ein anderes wichtiges Ziel gesteckt. Wie nämlich der Verfasser bereits im Jahre 1942 in der Zeitschrift „Bildmessung und Luftbildwesen“ dargelegt hat,² war noch die Frage zu klären, in welchem Ausmaß eine Geländefläche von einer solchen „gefährlichen Fläche“ abweichen mußte, damit eine Nebenlösung bei der mechanischen Einpassung mit Sicherheit vermeidbar ist. Zu diesem Zweck waren bloß gewisse Ergänzungen der Versuchsanordnungen erforderlich. Im Zusammenhang mit den Vorbereitungen hierzu wurde diese Fragestellung von K. Killian weiter präzisiert, indem er eine Definition der zu jeder „gefährlichen Fläche“ gehörigen „gefährlichen Räume“ entwickelte. In einer vor kurzem erschienenen Arbeit berichtete er darüber ausführlicher und versuchte zugleich auf Grund besonderer geometrischer Vereinfachungen eine Berechnung der „Breiten“ dieser „gefährlichen Räume“, und zwar für sechs in der Praxis hauptsächlich in Frage kommenden Fälle.³ Dabei wurde beispielsweise angenommen, daß die durch eine mögliche Nebenlösung bedingten Unsicherheiten der mechanischen Einpassung den dreifachen Betrag der

¹ J. Krames: Neue Nebenlösungen einer alten Aufgabe. Anz. Akad. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Kl. 77, 172—195 (1940). — J. Krames: Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven (Ein Beitrag zur Theorie der „gefährlichen Orte“). Mh. Math. Phys. 49, 327—354 (1941) [„Z E“]. — J. Krames: Über bemerkenswerte Sonderfälle des „gefährlichen Ortes“ der photogrammetrischen Hauptaufgabe. Mh. Math. Phys. 50, 1—13 (1941). — J. Krames: Über die mehrdeutigen Orientierungen zweier Sehstrahlbündel und einige Eigenschaften der orthogonalen Regelflächen zweiten Grades. Mh. Math. Phys. 50, 65—83 (1941) [„M O“]. — J. Krames: Der einfachste Übergang zur Nebenlösung bei vorliegendem „gefährlichen Ort“. Mh. Math. Phys. 50, 84—100 (1941). — Auf die zweite und vierte dieser Arbeiten wird in der Folge mit den in den eckigen Klammern angegebenen Abkürzungen verwiesen.

² J. Krames: Über die bei der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie auftretenden „gefährlichen“ Flächen. Bildmessg. u. Luftbildwes. 17, 1—18 (1942), insbesondere Nr. 8, S. 17. — Bei den Hinweisen auf diese Veröffentlichung wird als Abkürzung „B. u. L.“ verwendet.

³ K. Killian: Über die bei der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern vorkommenden gefährlichen Flächen und „gefährlichen Räume“. Photogr. Korresp. (Wien) 81, 13—23 (1945). — Mit Rücksicht auf die in der Geometrie übliche Ausdrucksweise sei für den „gefährlichen Raum“ die Bezeichnung „gefährliches Raumgebiet“ vorgeschlagen; in der Folge soll jedoch die erstere Benennung beibehalten bleiben. — Über die genauen geometrischen Begrenzungen dieser „gefährlichen Raumgebiete“ wird der Verfasser demnächst an anderer Stelle berichten.

normalen mittleren Orientierungsfehler m_n und m_φ erreichen. Die dieser Annahme entsprechende „Breite“ des „gefährlichen Raumes“ stimmt mit den Ergebnissen der oben erwähnten besonderen Versuche ebenfalls ziemlich gut überein.

Zusammenfassend überblickt man nunmehr erst die eigentliche Bedeutung dieser „gefährlichen Flächen“ für die photogrammetrische Praxis.

1. Zur Durchführung der Versuchsarbeiten sei folgendes bemerkt. Als Aufnahmeobjekte dienten verschiedene Modelle von „gefährlichen Flächen“, wie solche bereits in „B. u. L.“ (s. dort insbesondere Abb. 7, ferner die Raumbilder I und III) näher beschrieben wurden. Mit diesen Modellen waren geeignete Ausschnitte aus orthogonalen Hyperboloiden oder Kegeln entweder mittels glatter Oberfläche und eingezeichneten Erzeugenden (s. Abb. 1, 4, 5 und 8) oder mittels gespannter Fäden (Abb. 2,



Abb. 1.

3, 6 und 7) materiell verwirklicht. Diese Modelle wurden für die Aufnahmen immer so aufgestellt, daß die vier (bei orthogonalen Kegeln die beiden) auf der Fläche vorhandenen Haupterzeugenden genau waagrecht lagen. Zum rascheren Erkennen der Bildinhalte wurden an jedem Modell eine Anzahl von Buchstaben A, B, \dots (Abb. 1 bis 8), manchmal auch kleine schwarze Kreisscheibchen mit weißem Mittelpunkt (Abb. 4, 5 und 8) angebracht.

Als Aufnahmekammern wurden sogleich die Projektoren des für die Auswertungen bestimmten Multiplexgerätes verwendet und ihnen zu diesem Zweck lichtdicht ab-

schließende Deckel aufgesetzt. Damit konnten zugleich alle Fehlerquellen ausgeschaltet werden, die sonst mit dem Umprojizieren (Verkleinern) der von anderen Kammern gelieferten Bildpaare verbunden wären.

Die Abmessungen der Modellflächen waren derart gewählt, daß die aufzunehmenden Flächengebiete möglichst nahe an den Ebenen größter Schärfe der Multiplexobjektive lagen. Vor jeder Aufnahme eines Bildpaares waren beide Bildplatten exakt zu horizontalisieren, damit die Bildhauptstrahlen genau auf die in der Ebene II des Arbeitstisches vorher festgelegten Grundrisse der Aufnahmezentren O_1, O_2 und hierauf diese selbst in der richtigen Höhe oberhalb II eingestellt werden konnten. Denn O_1 und O_2 müssen auf der (geometrisch vollständigen) „gefährlichen Fläche“ liegen und außerdem noch weitere Bedingungen erfüllen.⁴ Die Projektoren des Multiplexes sind bekanntlich so eingerichtet, daß der Hauptpunkt jedes Bildes automatisch festliegt; in den Abb. 1 bis 8 ist er als schwarzes Scheibchen von 0.5 bis 1 mm Durchmesser leicht aufzufinden. Die Verbindungsgerade der Zentren, die Kernachse, war bei den in Nr. 3 besprochenen Sonderfällen genau waagrecht, in allgemeinen Fällen (Nr. 2) hatte ihr Winkel gegen die Grundebene II stets sehr kleine Werte. Bei der Wahl der Basisstrecke O_1, O_2 wurden selbstverständlich die in der Praxis üblichen Bedingungen (Flughöhe, Bildüberlappung usw.) tunlichst eingehalten.

⁴ S. auch weiter unten in Nr. 2. — Die Annahme der verschiedenen Zentrenpaare O_1, O_2 erfolgte auf Grund von genauen darstellend-geometrischen Konstruktionen, die in sehr großem Maßstab mittels einer „ISIS“-Zeichenmaschine ausgeführt wurden. Wie durch wiederholte Überprüfung festgestellt werden konnte, waren die so gewonnenen Koordinaten von O_1 und O_2 bis auf geringe Bruchteile von Millimetern genau. Zur Ausführung solcher Konstruktionen gehören allerdings viel Erfahrung und zeichnerisches Fingerspitzengefühl. Die rechnerische Vorbereitung der Versuchsaufnahmen wäre jedenfalls weitaus umständlicher gewesen.

Nach dem Entwickeln der Negative wurde jedesmal zuerst die ursprüngliche Stellung der Projektoren wiederhergestellt und die beiden Zielstrahlbündel zur Kontrolle abermals auf die in Aufnahmestellung gebrachte Modellfläche eingepaßt. Es geschah dies u. a., um allfällige Zentrierungsfehler der Platten vor dem weiteren Arbeiten zu beseitigen.

Beim gegenseitigen Orientieren der Zielstrahlbündel wurde das Verschwinden der y -Parallaxen immer mit Hilfe von Lupen sowie durch starkes Kippen der Projektionstischchen überprüft. Insgesamt kamen rund 30 Bildpaare zur Verarbeitung. Diese verhältnismäßig kleine Anzahl von Versuchen rechtfertigt sich vor allem wegen der mannigfachen einschränkenden Bedingungen, denen derartige Aufnahmen in den praktisch möglichen Fällen unterworfen sind.⁵

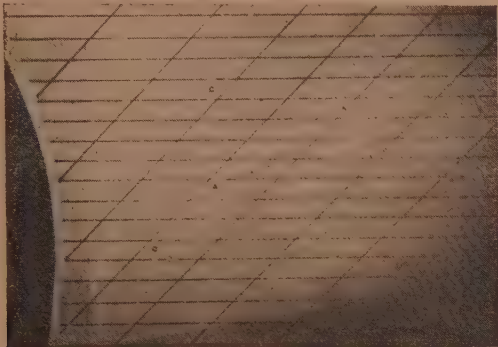


Abb. 2.

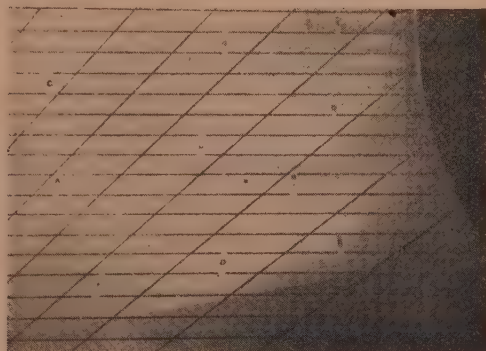


Abb. 3.

2. Allgemeine Fälle mit je zwei verschiedenen Lösungen der Hauptaufgabe, bei denen also die geometrisch exakte Orientierung der beiden Zielstrahlbündel auf zwei verschiedene Arten möglich ist, liegen bekanntlich vor, wenn die Aufnahmезentren O_1 , O_2 auf zwei „adjungierten“ Erzeugenden e_1 , e_2 der „gefährlichen Fläche“ angenommen wurden. Statt jeder näheren Erläuterung sei auf „Z E“, Nr. 4 und Nr. 6, und die dort beigelegten Raumbilder I bis IV verwiesen. Bei der Bearbeitung dieser Fälle wurde das Hauptgewicht auf solche, für die Praxis „besonders gefährliche“ Annahmen gelegt, bei denen Haupt- und Nebenlösung nur wenig voneinander verschieden sind (vgl. wieder „Z E“, Nr. 7, A, Punkt 3, oder „B. u. L.“, S. 12), wo also e_1 und e_2 (auf der geometrischen Fortsetzung der aufgenommenen Fläche) sehr nahe neben einer Haupterzeugenden verlaufen. In Abb. 2 und 3 ist ein derartiges Bildpaar in Diapositivstellung vergrößert wiedergegeben. Bei diesem Beispiel betrug die Basisstrecke $b = 120.5$ mm und das aufgenommene orthogonale Hyperboloid hatte folgende Achsenlängen:

$$2a = 360 \text{ mm}, \quad 2b = 328 \text{ mm}, \quad 2c = 787 \text{ mm}.$$

Wenn nun ein Bildpaar von dieser Beschaffenheit ausgehend von der Aufnahmelage in die zweite mögliche Orientierung gebracht werden sollte, so zeigte sich sofort, daß das „Sich-Schneiden“ zugeordneter Zielstrahlen bei gewissen Bewegungen der beiden Projektoren, bei denen die Verkantungen (α -Bewegungen) vorherrschend waren, immer noch ziemlich genau erhalten blieb, wie dies ja auch auf Grund der theoretischen Überlegungen zu erwarten war. Wegen dieses Umstandes konnte das mechanische Einpassen der zweiten möglichen Orientierung vorerst nicht ausgeführt werden.

⁵ Vgl. auch K. Killian: A. a. O., S. 18, Punkt C, a.

Gleiches würde aber für die Hauptlösung selbst gegolten haben, wenn die Aufnahmestellung nicht eben bekannt gewesen wäre.

Um die Nebenlösung dennoch exakt einzustellen, wurde (abermals auf Grund darstellend-geometrischer Konstruktionen) wie folgt vorgegangen: Wie bereits bekannt ist, stehen bei festgehaltenen Aufnahmezentren O_1, O_2 für den Übergang von der Aufnahmestellung zur Nebenlösung innerhalb jedes Bündels ∞^1 Drehachsen d_1, d_2 zur Verfügung. Diese liegen in den Symmetrieebenen zwischen der ursprünglichen Kernachse $k_1 = k_2$ und den durch O_1 bzw. O_2 gehenden adjungierten Erzeugenden e_1 und e_2 . Von diesen Ebenen kommen für unsere Versuche nur jene beiden — wir bezeichnen sie mit σ_1 und σ_2 — in Betracht, die den spitzen Winkel zwischen k_1 und e_1 bzw. zwischen k_2 und e_2 hälften.⁶ Von diesen Ebenen σ_1 und σ_2 wurden die Spuren s_1 bzw. s_2 auf der waagrechten Grundebene Π (Nr. 1) ermittelt. Auf Π befanden sich ferner beim Projizieren des in Aufnahmelage gebrachten Bildpaares die Zentralbilder von Erzeugenden f der anderen Schar, das sind solche, die e_1 und e_2 im Raume schneiden. Für jedes der Bündel wurde sodann eine solche Erzeugende f_1 bzw. f_2 ausgewählt, deren Zentralbild auf Π die zugehörige Spur s_1 bzw. s_2 in einem nicht ungünstig liegenden Punkt F_1 bzw. F_2 trifft. Weil jede dieser Erzeugenden f_1, f_2 der anderen Schar in der Nebenlösung zu einem Kernschnitt zweiter Ordnung der nunmehr verzerrten Modellfläche wird,⁷ kann man jedes der Bündel um den Zielstrahl $O_1 F_1$ bzw. $O_2 F_2$ so lange verdrehen, bis die auf Π vorhandenen Zentralbilder dieser Erzeugenden f_1 bzw. f_2 durch den Schnittpunkt K der Kernachse mit der Grundebene Π gehen, d. h. bis diese Bilder mit den vorher konstruktiv festgelegten und auf Π gezeichneten Geraden $F_1 K$ bzw. $F_2 K$ zusammenfallen.⁸ In der damit gewonnenen neuen Lage der Bündel sind die adjungierten Erzeugenden e_1, e_2 in die Kernachse übergegangen, so daß die beiden Bündel durch eine weitere gegenseitige Verdrehung um diese Achse in die gesuchte zweite Orientierung gelangen. Dies konnte wegen der nahezu waagrechten Lage der Kernachse (die auch während des ganzen Vorganges ungeändert blieb) im wesentlichen durch eine Querneigung (ω -Drehung) des einen Projektors und darauffolgende geringfügigere κ - und φ -Korrekturen leicht bewerkstelligt werden. Bei drei der ausgeführten Beispiele ergaben sich so für die Einstellung der Projektoren in der Nebenlösung gegenüber der Aufnahmestellung ($\kappa_1 = \kappa_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0$) folgende Werte:

A. Links:	$\kappa_1 = + 6^{\circ} 39'$	Rechts:	$\kappa_2 = + 6^{\circ} 39'$
	$\varphi_1 = - 2^{\circ} 51'$		$\varphi_2 = - 0^{\circ} 84'$
	$\omega_1 = + 1^{\circ} 76'$		$\omega_2 = - 0^{\circ} 25'$
B. Links:	$\kappa_1 = + 7^{\circ} 97'$	Rechts:	$\kappa_2 = + 7^{\circ} 41'$
	$\varphi_1 = - 2^{\circ} 60'$		$\varphi_2 = - 0^{\circ} 54'$
	$\omega_1 = + 2^{\circ} 86'$		$\omega_2 = + 0^{\circ} 42'$
C. Links:	$\kappa_1 = - 5^{\circ} 19'$	Rechts:	$\kappa_2 = - 5^{\circ} 28'$
	$\varphi_1 = + 2^{\circ} 13'$		$\varphi_2 = + 0^{\circ} 46'$
	$\omega_1 = - 1^{\circ} 22'$		$\omega_2 = + 0^{\circ} 51'$

Bei A und bei B wäre in der Praxis die Nebenlösung als solche leicht zu erkennen, weil man annehmen darf, daß der Kantungsunterschied zwischen je zwei Folgebildern

⁶ S. „M O“, insbesondere Satz 1 und 3. — Daß zusammengehörige Paare von Drehachsen d_1, d_2 projektive Strahlbüschel bilden, ist für das Weitere gegenstandslos.

⁷ Vgl. „Z E“, Nr. 5 oder „B. u. L.“, S. 11.

⁸ Der Punkt K lag bei dem unten angegebenen Beispiel B 32·5 m rechts vom Zentrum O_2 .

eines Aufnahmefluges höchstens rund $5^\circ \approx 5.6^\circ$ beträgt. Hingegen weicht im Fall C die Nebenlösung so wenig von der richtigen Orientierung ab, daß hier auf Grund der im Flugzeug registrierten Daten noch keine Entscheidung über die richtige Auswahl zwischen den beiden möglichen Lösungen getroffen werden könnte. Darüber hinaus wäre die genaue Rekonstruktion des aufgenommenen Geländes auch wegen des schon erwähnten „freien Spieles“ der in orientierter Lage befindlichen Bündel völlig illusorisch. Hatte man nämlich im Beispiel C die Projektoren anstatt durch die angegebenen Winkel bloß durch die halben oder durch die negativ genommenen oder die doppelten Winkel verdreht, so blieb die Orientierung der Bündel immer noch auffallend genau erhalten. Aus diesen Versuchen ergab sich die erstaunliche Feststellung, daß das „freie Spiel“ der orientierten Zielstrahlbündel bei Vorhandensein zweier nur wenig voneinander abweichenden Lösungen der Hauptaufgabe bis über 6° der φ -, 4° der ω -Bewegungen und bis über 16° der α -Bewegungen der Projektoren betragen kann.

Dieses „freie Spiel“ wäre aber noch bedeutend umfangreicher, wenn man y -Parallaxen zugeordneter Zielstrahlen bis zu etwa einem halben Millimeter außer acht ließe. Solche waren während der Versuchsarbeiten besonders in der Nähe des oberen und unteren Bildrandes häufig zu verzeichnen. Wäre bei einem ähnlich geformten Gelände an diesen Stellen eine Waldpartie oder eine andere topographisch ungünstige Oberflächenbeschaffenheit vorhanden, so könnte sogar jede innerhalb dieses erweiterten „freien Spieles“ mögliche Orientierung fälschlich als die richtige angesehen werden. Die besondere „Gefährlichkeit“ derartiger Geländeformen tritt somit durch diese praktischen Versuche deutlich in Erscheinung.

Um auch die durch die geschilderten Unsicherheiten bedingten „Modellverbiegungen“ kennenzulernen, wurden die behandelten Bildpaare in ihren von der Hauptlösung verschiedenen Orientierungen mittels des Multiplexes ausgewertet. Dabei hat ein von K. Killian erdachtes und angefertigtes Hilfsgerät sehr gute Dienste geleistet. Es bestand im wesentlichen aus einem linealförmigen Projektionstischchen mit eingezeichneter Mittellinie, das zwischen zwei Säulen in verschiedenen Neigungen einstellbar war. An den Säulen waren lotrechte Skalen und Fußmarken angebracht. Damit konnten alle im Raum auf einer Erzeugenden der Modellfläche liegenden Punkte in einem Arbeitsgang rasch kartiert werden. Die auf diese Weise festgestellten Verzerrungen waren in keinem Fall geringfügig, was auch damit übereinstimmt, daß die exakte Nebenlösung stets eine quadratische Verzerrung der aufgenommenen Fläche ergibt (s. „Z E“, Nr. 5 und „B. u. L.“, S. 11).

3. Der Sonderfall mit zusammenfallenden Lösungen der Hauptaufgabe, bei dem K. Killian, a. a. O., S. 14, für die aufgenommene Fläche die Bezeichnung „gefährliche Fläche im engeren Sinne“ vorschlägt, wurde ebenfalls in die Versuchsarbeiten einbezogen. Ein solcher Fall liegt immer vor, wenn das Aufnahmeobjekt ein orthogonales Hyperboloid oder ein orthogonaler Kegel (insbesondere ein Drehzylinder) ist und die Zentren O_1, O_2 auf einer der Haupterzeugenden der Fläche angenommen werden. Diese Erzeugende bildet hier also zugleich die Kernachse $k_1 = k_2$ (s. „Z E“, Nr. 7, A, Punkt 3 und 5, C, Punkt 8, oder „B. u. L.“, S. 12 und Abb. 14). Ein Bildpaar von dieser Beschaffenheit geben die Abb. 4 und 5 wieder. Hierbei war die Basis $O_1 O_2 = b = 200$ mm lang, und die durch O_1 bzw. O_2 gehenden Kreisschnitte der „gefährlichen Fläche“ hatten die Halbmesser $r_1 = 181$ mm bzw. $r_2 = 195$ mm. Die Hauptpunkte dieser Aufnahmen liegen zufolge der besonderen Aufstellung der Modellfläche (s. Nr. 1) auf dem Bildpaar der Haupterzeugenden $A B$, die zu der als Kernachse verwendeten Haupterzeugenden parallel ist.

In jedem solchen Fall war wieder die gegenseitige Beweglichkeit der in orientierter Lage befindlichen Zielstrahlbündel festzustellen. Exakt geometrisch gesprochen,

gestatten derartige Bündel gewisse infinitesimale Verdrehungen um ∞^1 Paare von Drehachsen d_1, d_2 , die durch O_1 bzw. O_2 gehen. Diese Achsen liegen in jenen Kern-ebenen σ_1 bzw. σ_2 , die im Punkt O_2 bzw. O_1 auf die dort vorhandenen Tangential-ebenen an die aufgenommene Fläche senkrecht stehen.⁹ Für das Beispiel in Abb. 4 und 5 wurden insbesondere jene beiden Drehachsen d_1, d_2 herausgegriffen, die gegen die Kernachse unter dem gleichen Winkel $\psi_1 = \pi - \psi_2$ geneigt sind. Auf konstruktivem Weg ergaben sich sodann die Winkel von d_1 und d_2 gegen die Koordinatenachsen (wobei $O_1 O_2$ wie üblich als x -Achse und die z -Achse normal zu Π angenommen wurde) sowie $\operatorname{tg} \psi_1 = -\operatorname{tg} \psi_2 = 6.26$. Daraus folgt für das Verhältnis der infinitesimalen Winkel $d\delta_1 : d\delta_2$ der Verdrehungen¹⁰ um d_1 bzw. d_2 :

$$d\delta_1 : d\delta_2 = r_2 \sin \delta_2 : r_1 \sin \delta_1 = 325 : 301.$$

Zerlegt man diese Verdrehungen um d_1, d_2 nach dem Satz vom Geschwindigkeits-parallelepiped¹¹ in je eine infinitesimale κ -, φ - und ω -Drehung der beiden Projektoren,

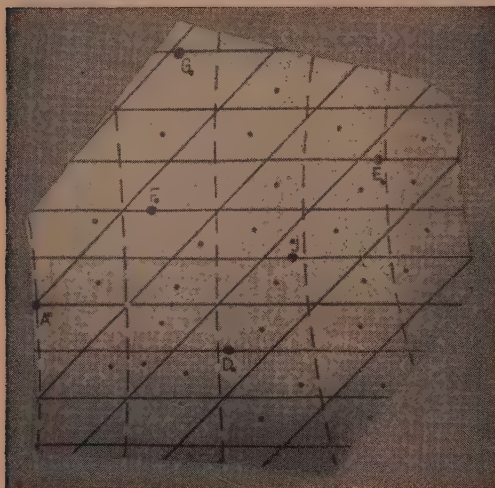


Abb. 4.

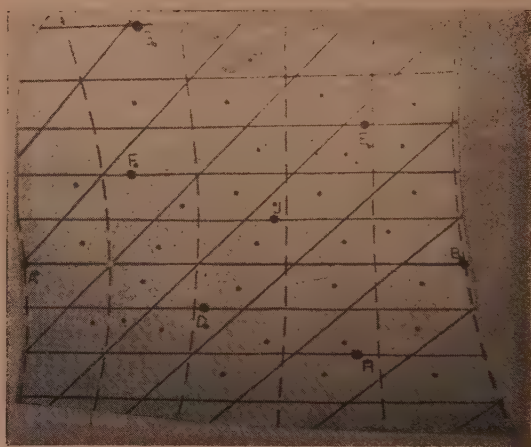


Abb. 5.

so sind die zugehörigen Drehwinkel $d\kappa_1, d\varphi_1, d\omega_1$ bzw. $d\kappa_2, d\varphi_2, d\omega_2$ den Richtungsparametern von d_1, d_2 proportional. Zuzufolge $d\delta_1 : d\delta_2 = 325 : 301$ erhält man schließlich:

$$\begin{array}{ll} \text{Links: } d\kappa_1 = 320 \cdot k, & \text{Rechts: } d\kappa_2 = 274.5 \cdot k \\ d\varphi_1 = 26.5 \cdot k & d\varphi_2 = 114 \cdot k \\ d\omega_1 = -51 \cdot k & d\omega_2 = 47.5 \cdot k \end{array}$$

und darin bedeutet k eine infinitesimale Konstante. Es handelte sich sodann um jene genügend kleinen, endlichen Werte von k , für welche die beiden Bündel nach diesen Verdrehungen immer noch eine Lage einnehmen, die von einer orientierten praktisch nicht zu unterscheiden ist. Da die äußersten noch einstellbaren Orientierungen bei

$$\begin{array}{ll} \text{D. Links: } \kappa_1 = \pm 1^\circ 7' & \text{Rechts: } \kappa_2 = \pm 0^\circ 92' \\ \varphi_1 = \pm 0^\circ 5' & \varphi_2 = \pm 0^\circ 38' \\ \omega_1 = \mp 0^\circ 17' & \omega_2 = \pm 0^\circ 16' \end{array}$$

⁹ S. „M O“, Nr. 6, insbesondere Satz 10. — Auch hier bilden entsprechende Drehachsenpaare d_1, d_2 projektive Strahlbüschel (vgl. Fußnote 6).

¹⁰ S. „M O“, Nr. 6, Gl. (11), wo solche Beziehungen erstmalig abgeleitet wurden.

¹¹ S. etwa Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 3, S. 227.

erreicht waren, betrug das „freie Spiel“ der orientierten Bündel im vorliegenden Beispiel bloß $\pm 2.1^g$ (links) und $\pm 1.8^g$ (rechts) der κ -Bewegungen, ferner $\pm 0.2^g$ bzw. $\pm 0.8^g$ der φ - und rund $\pm 0.3^g$ der ω -Drehungen. Demnach lag hier der größte in Frage kommende Wert von k bei $\pm 1/3^\circ$ ($\approx 11''$).

Auch bei allen anderen Beispielen von „gefährlichen Flächen im engeren Sinne“ war das „freie Spiel“ wesentlich enger begrenzt als bei den

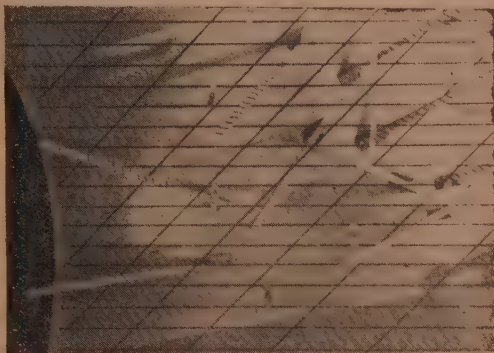


Abb. 6.



Abb. 7.

unter Nr. 1 besprochenen Fällen. Dies stimmt ebenfalls mit den bereits anlässlich der geometrischen Forschungen ausgesprochenen Vermutungen überein.¹²

4. Die mit den „gefährlichen Flächen“ verbundenen „gefährlichen Räume“ (siehe Einleitung) waren schließlich Gegenstand zahlreicher weiterer Modellversuche. Um die ungefähren Abmessungen dieser Räume festzustellen, wurden unter den gleichen Bedingungen, wie unter Nr. 2 und Nr. 3 geschildert, verschiedene Bildpaare von „gefährlichen Flächen“ hergestellt, wobei nunmehr jedem Modell eine Anzahl gerader Stäbchen beigelegt war, welche Skalen (s. Abb. 6 und 7) oder in regelmäßigen Abständen angebrachte Punkte (Abb. 8) trugen. Diese Stäbchen waren so aufgestellt, daß sie von den Zentren aus leicht einzusehen und gegen die Modellfläche unter rund 45° geneigt waren. Nach Herstellung der beiden jeweils möglichen Orientierungen, die vorerst (ohne Rücksicht auf diese Stäbchen) wie unter Nr. 2 und 3 beschrieben, am Multiplex erfolgte, ließ sich sodann leicht prüfen, bis zu welchen Stellen auf den einzelnen Stäbchen auch in der Nebenlösung noch keine y -Parallaxen auftraten. Die Ergebnisse waren folgende:

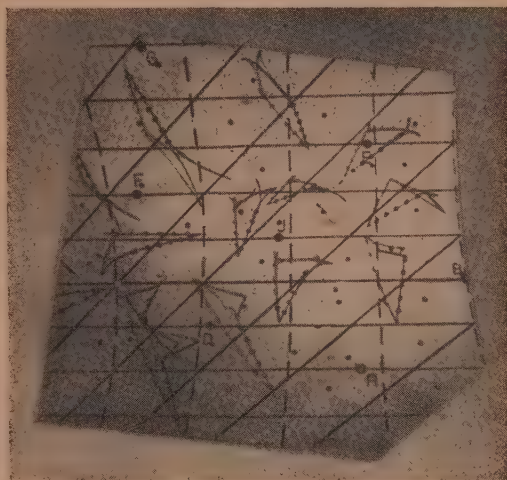


Abb. 8.

a) Bei allen Fällen mit getrennten, jedoch nur wenig voneinander abweichenden Lösungen der Hauptaufgabe (wie solche in Nr. 2, Beispiel A, B und C vorliegen) gibt es in der Nebenlösung parallaxenfreie Punkte, die $s = 3$ bis 5 mm von der Modellfläche entfernt liegen. Insbesondere

¹² Vgl. „Z E“, Nr. 7, A, Punkt 3, oder „B. u. L.“, S. 12.

sind die **größeren** parallaxenfreien Entfernungen von der Fläche bei jenen Fällen (wie etwa C) zu verzeichnen, bei denen die Verkantungswinkel κ_1, κ_2 zwischen Haupt- und Nebenlösung die **kleineren** Werte haben.

b) Bei den „gefährlichen Flächen im engeren Sinne“ (Nr. 3) gibt es bei den von der Hauptlösung am stärksten abweichenden Orientierungen (wie etwa im Beispiel D für $k = \pm 1/3^\circ$) parallaxenfreie Raumpunkte, die bis zu 30 mm von der Modellfläche entfernt sind.

c) In beiden Fällen war überdies zu beobachten, daß die in Rede stehenden Punkte in der Nähe der zur Grundebene II (Nr. 1) normalen Kernebene von der Modellfläche etwas weiter entfernt liegen als am oberen oder unteren Bildrand.

Da beim Multiplex mit einem Modellmaßstab von 1 : 2500 bis 1 : 10000 zu rechnen ist, erkennt man somit, daß in der Natur die Abweichungen aufgenommener Geländepunkte von einer mathematisch definierten „gefährlichen Fläche“ Φ im Fall a rund 12 m bzw. bei kleinem Maßstab 50 m und im Fall b rund 75 bzw. 300 m betragen könnten, ohne daß mit Hilfe solcher Punkte die durch Φ bedingte Unsicherheit der mechanischen Einpassung zu beseitigen wäre.

Die damit experimentell festgestellten „Breiten“ der „gefährlichen Räume“ stimmen mit den von K. Killian, a. a. O., S. 22, berechneten ziemlich gut überein. Dabei ist jedoch zu beachten, daß dort als Verkantungswinkel $\kappa = 30' \approx 56^\circ$ vorausgesetzt wurde. Würde man in die von Killian, a. a. O., S. 17 und S. 21f., verwendeten Gl. (1) und (10) beispielsweise die zu C und D gehörigen Werte $\kappa \approx 5^\circ$ bzw. $\kappa \approx 1^\circ$ einführen, so ergäbe sich als „Breite“ des „gefährlichen Raumes“ (im Maßstab des Modelles) $2s \approx 8$ mm bzw. $2s \approx 38$ mm, also 80 bzw. 65% der gemessenen „Breiten“.

Die unter c erwähnten Beobachtungen stehen mit Killians Ausführungen ebenfalls im Einklang.

Um obige Ergebnisse richtig einzuschätzen, hat man sich noch besonders vor Augen zu halten, daß für jede beliebig geformte Gelände­fläche, die (soweit die Aufnahme reicht) innerhalb eines solchen „gefährlichen Raumes“ verläuft, das mechanische Einpassen **zwangsläufig mit Fehlern** behaftet ist, die **größer sind als die normalen** (bei nichtgefährlichen Räumen auftretenden) **Orientierungsfehler**.

Darnach läßt sich jetzt auch ermessen, welche einschneidende Bedeutung der Tatsache zukommt, daß zu je zwei im Raum beliebig gewählten Aufnahmezentren O_1, O_2 eine Mannigfaltigkeit von ∞^5 geometrisch definierten „gefährlichen Flächen“¹³ und eine dementsprechende Mannigfaltigkeit „gefährlicher Räume“ gehört.

5. Eine wichtige Auswirkung des „gefährlichen Raumes“ auf das praktische Orientieren sei noch kurz berührt. Da beim mechanischen Einpassen der Bildpaare gewöhnlich mit sechs Punktpaaren begonnen wird,¹⁴ erhebt sich vor allem die Frage: Wann liegen sechs verschiedene Geländepunkte innerhalb eines „gefährlichen Raumes“?

¹³ Vgl. etwa „Z E“, Nr. 4 und Nr. 6 oder „B. u. L.“, S. 11. — Bei Verwendung eines anderen Doppelprojektors an Stelle des Multiplexes würden wir mit ähnlichen Versuchen zu Zahlenwerten gelangen, die sich aus unseren Werten vermutlich durch eine (der Orientierungsgenauigkeit des Gerätes entsprechende) ungefähr proportionale Änderung ergeben. — Dennoch wäre die Durchführung solcher Versuche — besonders für eine höhere Instrumentgenauigkeit als beim Multiplex — sicherlich sehr aufschlußreich.

¹⁴ S. u. a. K. Schwidofsky: Luft- und Erdbildmessung, 2. Aufl., S. 102. Leipzig und Berlin, 1939.

Wie durch frühere geometrische Untersuchungen bereits klargestellt wurde, sind durch je fünf von sechs Punktpaaren eines gegebenen Bildpaares im allgemeinen je elf (zum Teil imaginäre), insgesamt also $6 \times 10 + 1 = 61$ gegenseitige Orientierungen der beiden Aufnahmen bestimmt.¹⁵ Von diesen geometrisch möglichen Lösungen der Hauptaufgabe (die zum Teil auch zusammenfallen können) greifen wir nun jene heraus, bei denen auch die zum jeweiligen sechsten Punktpaar gehörigen Zielstrahlen sich schneiden. Für jede Lösung der letzteren Art suchen wir ferner die durch je fünf der damit bestimmten Raumpunkte P_i (und die Zentren O_1, O_2) gehenden „gefährlichen Flächen“¹⁶ Φ und untersuchen sodann, ob die dem vorliegenden Bildpaar entsprechenden Ausschnitte aus diesen Flächen deren „gefährlichen Gebieten“¹⁷ angehören. Die dann noch in Frage kommenden Flächen Φ sollen mit Φ_i bezeichnet werden. Wenn auch der sechste Raumpunkt P_6 im allgemeinen auf keiner solchen Fläche Φ_i liegen wird, ist dennoch mit der Möglichkeit zu rechnen, daß P_6 in einem der „gefährlichen Räume“ \mathcal{R}_i liegt, die mit den Flächen Φ_i verbunden sind. Denkt man sich nämlich P_6 etwa lotrecht im Raum verschiebbar und betrachtet man die in Abb. 9 angedeuteten Querschnitte durch diese Räume \mathcal{R}_i , so sieht man ohneweiters, daß P_6 (innerhalb des überhaupt möglichen Aufnahmegebietes) auch einem solchen Raum \mathcal{R}_i angehören kann, wobei die Wahrscheinlichkeit hierfür durchaus nicht sehr klein sein muß.

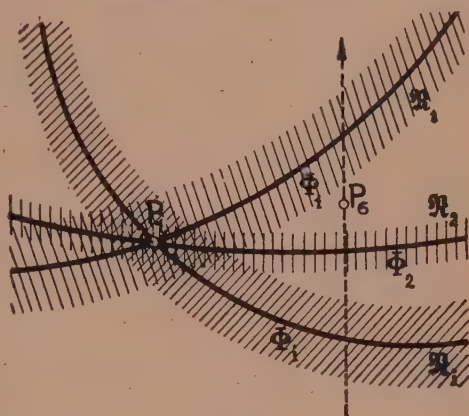


Abb. 9.

Aus diesen Überlegungen erkennt man, daß die oben aufgeworfene Frage, deren Beantwortung für das praktische Auswerten zweifellos sehr wichtig wäre, in allgemeinen Fällen kaum entschieden werden kann. Denn die rein geometrische Orientierungsaufgabe für fünf beliebige Punktpaare eines Bildpaares ist bisher ebensowenig in praktisch brauchbarer Form gelöst worden wie die Aufgabe, durch fünf Raumpunkte die zu zwei gegebenen Aufnahmezentren O_1, O_2 gehörigen „gefährlichen Flächen“ zu legen. An obiger Erkenntnis würde sich im allgemeinen kaum etwas ändern, wenn in den Geländebildern neben den sechs Punktpaaren auch deren Umgebungen in Betracht gezogen werden, wie dies für das mechanische Einpassen oft empfohlen wird. Denn diese Umgebungen werden ja ebenfalls (zum Teil oder zur Gänze) innerhalb eines der betrachteten „gefährlichen Räume“ liegen. Wenn aber mit den gewählten sechs Punktpaaren eingepaßt wird, ohne vorher zu prüfen, ob die entsprechenden Raumpunkte einem „gefährlichen Raum“ angehören oder nicht, so könnte vorerst eine „Nebenlösung“ eingepaßt werden, die sich bestenfalls hinterher als unbrauchbar erweisen würde. Die Orientierungsarbeit müßte sodann mit

¹⁵ E. Kruppa: Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven mit innerer Orientierung. S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa 122, 1939—1948 (1913). — Da wir nur „Zielstrahlen“ (Halbstrahlen) und nicht „Sehstrahlen“ im geometrischen Sinne betrachten, werden im folgenden die sog. „ergänzenden Orientierungen“ (s. „Z E“, Nr. 1, S. 332) außer acht gelassen.

¹⁶ Es gibt im allgemeinen zehn solche Flächen, von denen allerdings nicht jede ein zweidimensionales Kontinuum reeller Punkte aufweisen muß.

¹⁷ S. „B. u. L.“, S. 13, und den vom Verfasser angeregten und geförderten Aufsatz: A. Wunderlich: Zur Eindeutigkeitsfrage der Hauptaufgabe der Luftphotogrammetrie. Mh. Math. Phys. 50, 151—164 (1941).

anderen sechs Punktpaaren von neuem begonnen werden, ohne dabei eine bessere Gewähr für das Einpassen der richtigen Orientierung zu bieten.

Wie diese Unsicherheiten, nachdem sie einmal erkannt sind, vermieden werden können, soll bei einer anderen Gelegenheit noch ausführlich erörtert werden. Hier sei darüber hinaus bloß bemerkt, daß diese Schwierigkeiten der Luftphotogrammetrie jedenfalls dann restlos beseitigt wären, wenn es gelänge, die absolute Orientierung der Luftaufnahmen bereits während des Aufnahmezuges hinreichend genau zu registrieren. Damit bestätigt sich neuerdings, daß die Bestimmung der äußeren Orientierung von Luftbildern (im Hinblick auf die Überbrückung festpunktloser Räume) derzeit als eine Kernfrage der Luftphotogrammetrie anzusehen ist.

(Eingegangen am 10. Mai 1947.)

Die Temperaturverteilung im Ziehgut beim Drahtziehen.

Von H. Korst, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Kritische Untersuchung der Ergebnisse eines bekannten Näherungsverfahrens zur Bestimmung der Temperaturverteilung im Ziehgut infolge Formänderungs- und Reibungsarbeit. Ausgehend von der Differentialgleichung des Wärmeleitungs- und Wärmetransportproblems wird nach Einführung plausibler Idealisierungen die geschlossene Lösung der gemischten inhomogenen Randwertaufgabe gewonnen. Für die vor allem wichtige Oberflächentemperatur am Ziehgut erweisen sich die Werte der Näherungsmethode als befriedigend bestätigt; beim Temperaturverlauf im Innern des Ziehgutes ist dagegen die Übereinstimmung weniger gut.

Die beim Ziehen auftretenden Temperaturerhöhungen im Ziehgut sind einerseits durch in Wärme umgesetzte Formänderungsarbeit,¹ andererseits durch die Reibung zwischen Drahtoberfläche und Ziehdüsenwand bedingt. Während erstere mit guter Begründung als konstant über den Drahtquerschnitt angesehen werden kann, wenn man von den zusätzlichen Schiebungen in Düsenwandnähe absieht,² ist der Beitrag der Düsenreibung innerhalb des Ziehholts im wesentlichen auf eine dünne Randschicht des Drahtes beschränkt, wo erhebliche örtliche Temperatursteigerungen auftreten. Dies hat zur Folge, daß insbesondere bei hohen Ziehgeschwindigkeiten mit starker Düsenwärmerzeugung, Beeinträchtigung der Schmierverhältnisse und schließlich auch mit dem Auftreten beträchtlicher Zugeigenspannungen im Ziehgut gerechnet werden muß.³ Aus diesem Grund erweist es sich für die Praxis als notwendig, gestützt auf theoretische Überlegungen zur sicheren Beherrschung der Erwärmungserscheinungen zu gelangen.⁴

Von E. Siebel und R. Kobitzsch³ ist ein Verfahren zur Berechnung der Temperaturverteilung angegeben worden, welches die gewünschte Klärung anstrebt. Es fällt jedoch an dieser Arbeit auf, daß zur Ableitung der Formeln, bei Beachtung des durch die Wärmezufuhr am Düsenrand bedingten Temperaturgradienten und der Gesamtmenge der durch den Drahtquerschnitt transportierten Wärme, über die Art der Temperaturverteilung über den Querschnitt (parabolisch) von vorneherein verfügt wird. Da diese Annahme die Differentialgleichung des physikalischen

¹ A. Eichinger und W. Lueg: Mitt. Kaiser-Wilhelm-Inst. Eisenforsch. Düsseldorf **23**, 21—30 (1941); Stahl u. Eisen **61**, 275 (1941).

² E. Siebel und H. Hühne: Mitt. Kaiser-Wilhelm-Inst. Eisenforsch. Düsseldorf **13**, 43—62 (1931); Stahl u. Eisen **51**, 597 (1931).

³ E. Siebel und R. Kobitzsch: Die Erwärmung des Ziehgutes beim Drahtziehen. Stahl u. Eisen **63**, 110—113 (1943).

⁴ W. Lueg: Temperatur- und Kraftverhältnisse beim Ziehen durch Mehrfachdüsen. Stahl u. Eisen **63**, 113 (1943).

Vorganges — ohne sie zu berücksichtigen oder zu erfüllen — offenbar ersetzen muß, erscheint es zunächst fraglich, ob die damit zweifellos erreichte Einfachheit der Problembehandlung durch deren Ergebnisse gerechtfertigt wird.

Eine exakte Behandlung des Problems erscheint jedenfalls geboten.

Nach Ausbildung eines stationären Temperaturfeldes in einem mit der Düse fest verbundenen Koordinatensystem führt die Wärmebilanz für ein Raumelement auf die Differentialgleichung für das Temperaturfeld:

$$\Delta \vartheta - \frac{c \gamma}{\lambda} (v \nabla) \vartheta = \frac{m}{\lambda}, \quad (1)$$

worin ϑ °C die Übertemperatur gegenüber der Eintrittstemperatur des Ziehgutes in die Düse,
 c kcal/kg ° die spezifische Wärme,
 γ kg/cm³ das spezifische Gewicht,
 λ kcal/cm s ° den Wärmeleitungskoeffizienten,
 v cm/s den Vektor der Geschwindigkeit des Ziehgutes,
 m kcal/cm³ s die durch Formänderungsarbeit pro Volums- und Zeiteinheit im Ziehgut erzeugte Wärmemenge bedeuten.

Gl. (1) stellt eine inhomogene lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung dar, die nach Vorgabe der speziellen Randbedingungen zu lösen ist.

Für den vorliegenden Fall kann man ohne Verzicht auf quantitative Genauigkeit des Ergebnisses folgendes voraussetzen:

1. Eine Behandlung als ebene Problem ist bei nicht zu kleinen Drahtstärken mit Rücksicht auf die zu erwartende geringe „Eindringtiefe“ der Wandreibungseinflüsse und wegen der Voraussetzung 2 statthaft.
2. Die Verteilung der Wärmequellen zufolge der Formänderungsarbeit ist gleichmäßig für jeden Querschnitt des Ziehholes, die Quellstärke ist demnach allein eine Funktion der Koordinate in der Ziehrichtung.
3. In der Ziehrichtung ist die Wärmeleitung gegenüber dem Wärmetransport vernachlässigbar klein.⁵

Bezeichnet man die Koordinate in Ziehrichtung mit x , den Abstand von der Düsenwand mit y , die Geschwindigkeit in der Richtung x mit v , so erhält die Differentialgleichung (1) die Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} - \frac{c \gamma v}{\lambda} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{m(x)}{\lambda}. \quad (2)$$

Der Bereich erstreckt sich über $0 < x < \infty$ und $0 < y < \infty$. Als Randbedingungen sind vorgeschrieben:

I. $\vartheta(0, y) = 0$ (Anfangsbedingung); die Übertemperatur am Düsenanfang $x = 0$ ist Null für alle y .

II. $\vartheta(x, \infty)$ soll endlich bleiben am uneigentlichen Rand $y = \infty$.

III. $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0} = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} Q & \text{für } 0 < x < x_1 \text{ } (x_1 = \text{Düsenlänge}), \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } x > x_1. \end{cases}$

Q kcal/cm² s ist die pro Zeit- und Flächeneinheit von der Drahtoberfläche in das Innere des Ziehgutes abgegebene Wärmemenge. Diese kann man auf die gesamte durch Reibungsarbeit zwischen Düsenwand und Draht entstehende Wärme Q , beziehen,

⁵ Vgl. etwa P. Frank und R. v. Mises: Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 7. Aufl., II. Teil, S. 250. Braunschweig: Vieweg u. Sohn. 1927.

so daß $Q = \psi \cdot Q_r$ ist. ψ ist ein empirischer Wert, der je nach Wärmeableitung der Düse zwischen 0.8 und 1.0 liegt.³ Es ist

$$Q = \psi \cdot Q_r = \psi \cdot \mu \cdot k_f \cdot v \cdot A,$$

worin μ den Reibungskoeffizienten zwischen Ziehgut und der Düsenwand,

k_f kg/cm² die mittlere Formänderungsfestigkeit des Ziehgutes und

$A = \frac{1}{42700}$ kcal/kg cm das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit bedeuten.

Als lineare Differentialgleichung kann Gl. (2) in zwei Gleichungen derart aufgespalten werden, daß deren erste das Temperaturfeld $\vartheta_1(x, y)$ der Wärmequellen im Ziehgut, die zweite aber, $\vartheta_2(x, y)$, den Einfluß der Düsenwand beschreibt. Die Lösung von Gl. (2), die man aus linearer Überlagerung $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ der entsprechenden Teillösungen zusammensetzt, muß die Randbedingungen erfüllen.

Demgemäß ergibt sich für das Temperaturfeld ϑ_1 — da $\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ sein soll — die inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d\vartheta_1}{dx} = -\frac{m(x)}{e \cdot \gamma \cdot v} \quad (3)$$

mit der unteren Grenze $\vartheta_1(0) = 0$, die nach Vorgabe des Verformungsgesetzes, also des Querschnittverlaufes in der Düse $F = F(x)$ und wegen

$$m(x) = \frac{A \, dF \, k_f \, v}{F \, dx}$$

leicht durch Quadratur auf die Temperatur ϑ_1 als Funktion der oberen Grenze $F(x)$ führt:

$$\vartheta_1(x) = \frac{k_f \cdot A}{e \cdot \gamma} \ln \frac{F(0)}{F(x)}. \quad (4)$$

Die verbleibende lineare homogene partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial y^2} - \frac{v \cdot e \cdot \gamma}{\lambda} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

welcher das Temperaturfeld $\vartheta_2(x, y)$ der Düsenreibung genügt, muß, da $\vartheta_1(x)$ an den eigentlichen Rändern keinen Beitrag zu den Randwerten liefert, für sich allen vorgegebenen Randbedingungen entsprechen:

I. $\vartheta_2(0, y) = 0$.

II. $\vartheta_2(x, \infty)$ bleibt endlich.

$$\text{III. } \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} \right)_{y=0} \begin{cases} = -\frac{1}{\lambda} Q & \text{für } 0 < x < x_1, \\ = 0 & \text{für } x < 0; x > x_1. \end{cases}$$

Es liegt hier eine gemischte Randwertaufgabe vor, wobei für den Rand $(x, 0)$ eine unstetige, inhomogene Randbedingung erfüllt werden muß.

Zu ihrer Bewältigung bedient man sich mit Vorteil der Laplace-Transformation,⁶ für welche die x -Richtung ausgezeichnet wird.

Gemäß

$$L(\vartheta_2) = \int_0^\infty \vartheta_2(x, y) e^{-px} dx = u(p, y),$$

⁶ Z. B. K. W. Wagner: Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig. 1940. — P. Funk: Heavisides Operatorenrechnung, ihre Begründung durch die Laplace-Transformation und ihre Anwendung auf technische Probleme. Vortragsreihe, gehalten am Außeninstitut der Technischen Hochschule in Wien; als Manuskript vervielfältigt. Wien. 1947.

$$L\left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\right) = p \cdot u + \vartheta_2(0) \text{ und } \vartheta_2(0) = 0 \text{ wegen I,}$$

und

$$L\left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial y^2}\right) = \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$\frac{v \cdot c \cdot \gamma}{\lambda} = \frac{1}{a^2} = \text{const.}$$

(was bei nicht zu großen Querschnittsänderungen am sichersten durch Auszeichnung der Geschwindigkeit am Düsenende statthaft erscheint) ergibt sich im Unterraum die homogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{1}{a^2} p \cdot u = 0 \quad (6)$$

mit der Lösung

$$u = C_1 \cdot e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} y} + C_2 \cdot e^{+\frac{\sqrt{p}}{a} y} \quad (7)$$

Um der Randbedingung II zu entsprechen, muß $C_2 = 0$ sein. Für $y = 0$ ergibt sich aus Gl. (7)

$$u(p, 0) = C_1 = C,$$

ferner durch Differentiation von Gl. (7) an der Stelle $y = 0$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = -C \frac{\sqrt{p}}{a}$$

und damit

$$C = -\frac{a}{\sqrt{p}} \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} \quad (8)$$

Nun führt man die III. Randbedingung ein, indem man für $-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y}\right)_{y=0}$ bei $x = 0$ die Sprungfunktion von der konstanten Höhe $+Q$ und bei $x = x_1$ die entgegengesetzte Sprungfunktion $-Q$ ansetzt. Dies ergibt für den Unterraum bei Berücksichtigung des Verschiebungssatzes:

$$-\lambda L\left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial y}\right)_{y=0} = -\lambda \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = Q \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-x_1 p}}{p}\right)$$

und

$$C = u(p, 0) = \frac{aQ}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{p^3}} - \frac{e^{-x_1 p}}{\sqrt{p^3}}\right), \quad (9)$$

womit die Lösung für den Unterraum die Form

$$u(p, y) = \frac{aQ}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{p^3}} - \frac{e^{-x_1 p}}{\sqrt{p^3}}\right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} y} \quad (10)$$

erhält.

Bei der Rücktransformation in den Oberraum können Summanden nach dem Additionssatz der Laplace-Transformation getrennt behandelt werden. Dementsprechend ist — von der Mitführung des konstanten Faktors $\frac{aQ}{\lambda}$ sei bis zum Resultat abgesehen —

$$L^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{p^3}} - \frac{e^{-x_1 p}}{\sqrt{p^3}}\right) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} y}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^3}} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} y}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{e^{-x_1 p}}{\sqrt{p^3}} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} y}\right\}. \quad (11)$$

Der erste Summand wird in der Weise rücktransformiert, daß man den Faktor $1/p$ abspaltet, zu der verbleibenden Funktion im Unterraum, $g(p)$, die Oberfunktion $f(x)$ aufsucht und diese sodann gemäß

$$L^{-1}\{u(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} g(p)\right\} = \int_0^x f(x) dx \quad (12)$$

integriert.

⁷ Hier ist wegen $Q = Q(v)$ die oben erwähnte Beschränkung auf $v \sim \text{konst.}$, $\psi = \text{konst.}$ enthalten.

Zunächst ergibt die allgemeine Umkehrformel hier für

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} y} e^{p x} dp \quad (13)$$

unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes, indem wegen der Mehrdeutigkeit des Integranden der Integrationsweg auf den Verzweigungsschnitt, die negative reelle Achse der p -Ebene, verlegt werden muß,⁸

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{y^2}{4a^2 x}} \quad (14)$$

Die Integration führt man nach Teilen durch und erhält schließlich, da der zweite Summand im Oberraum lediglich um x_1 verschoben erscheint und nur für Werte $x > x_1$ existiert (Verschiebungssatz),

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x, y) = & \frac{aQ}{\lambda} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} e^{-\frac{y^2}{4a^2 x}} - \frac{y}{a} \left[1 - \Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{x}}\right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x-x_1} e^{-\frac{y^2}{4a^2(x-x_1)}} + \frac{y}{a} \left[1 - \Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{x-x_1}}\right) \right] \right\}. \quad (15) \\ & \rightarrow \text{für } x > x_1 \end{aligned}$$

Zur numerischen Auswertung sind die Werte der Fehlerfunktion Φ aus Funktionstabellen zu entnehmen.^{10, 11}

Damit ist die geschlossene Darstellung für das Temperaturfeld ϑ_2 gewonnen.

Es sei bemerkt, daß der Temperaturverlauf an der Oberfläche des Ziehgutes auf wesentlich einfacherem Weg erhalten werden kann, wenn man die Lösung für $u(p, 0)$, im Unterraum, Gl. (9), in den Oberraum transformiert. Dann ergibt sich unmittelbar wegen

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^\nu}\right) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$$

und

$$\Gamma(n+1, 5) = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} \quad (n \text{ ganzzahlig}),$$

$$\vartheta_2(x, 0) = \frac{aQ}{\lambda} \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{x} - \sqrt{x-x_1}). \quad (16)$$

$\rightarrow \text{für } x > x_1$

Die resultierende Temperaturverteilung ϑ ist die Überlagerung der Temperaturfelder ϑ_1 und ϑ_2 , Gl. (4) und (15).

Stellt man die hier entwickelte Lösung den Ergebnissen von Siebel und Kobitzsch³ gegenüber, so kann sich die Diskussion wegen der Identität der Resultate für ϑ_1 und der auch dort durchgeführten linearen Superposition von ϑ_1 und ϑ_2 auf die Ausdrücke für ϑ_2 beschränken.

Siebel und Kobitzsch erhalten eine Verteilung, welche explizit durch

⁸ R. Rothe, F. Ollendorf und K. Pohlhausen: Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik, S. 138. Berlin: Springer-Verlag. 1931.

⁹ S. auch W. Magnus und F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Kap. VIII, § 2, S. 128/129. Berlin: Springer-Verlag. 1943.

¹⁰ Etwa Jahnke-Emde: Funktionstabellen mit Formeln und Kurven, 2. Aufl., S. 98. Leipzig. 1933.

¹¹ Übrigens sind die aus der Fehlerfunktion durch Differentiation erhaltenen Funktionen des parabolischen Zylinders D_ν (Weber-Hermiteische Funktionen) auch für negative Ordnung (der Integration entsprechend) erklärt. Analog könnte die hier für ein ganzzahliges ν gewonnene Lösung als Hermiteische orthogonale Funktion der Ordnung $n = -2$ gedeutet werden. Vgl. Magnus-Oberhettinger: A. a. O., Kap. VI, § 3, S. 93 (dort Vorzeichenfehler).

$$\vartheta_2(x, y) = \frac{aQ}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\sqrt{x} \left(1 - \frac{y}{a\sqrt{6x}} \right)^2 - \sqrt{x-x_1} \left(1 - \frac{y}{a\sqrt{6(x-x_1)}} \right)^2 \right] \quad (17)$$

→ für $x > x_1$

dargestellt werden kann. Speziell erhalten sie für die vor allem interessierende Randtemperatur ($y = 0$) den Ausdruck

$$\vartheta_2(x, 0) = \frac{aQ}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\sqrt{x} - \sqrt{x-x_1} \right], \quad (18)$$

→ für $x > x_1$

der, wie ein Vergleich mit Gl. (16) zeigt, sehr gut mit der hier abgeleiteten Lösung übereinstimmt. Die Abhängigkeit von den Stoffwerten, der Ziehgeschwindigkeit und der x -Koordinate ist die gleiche; lediglich der Koeffizient zeigt die geringe Abweichung von nicht ganz 10%.

Dagegen weicht die Temperaturverteilung im Innern des Drahtes stärker von der hier gewonnenen Lösung ab, zeigt insbesondere nicht den bei Wärmeleitungsproblemen charakteristischen, asymptotisch verschwindenden Verlauf. Die für ein

bestimmtes Zahlenbeispiel nach den beiden Verfahren sich ergebenden Lösungen sind in den Abb. 1 und 2 gegenübergestellt. Die Ausgleichstemperatur in einiger Entfernung von der Düse ist bei beiden Lösungen natürlich die gleiche.

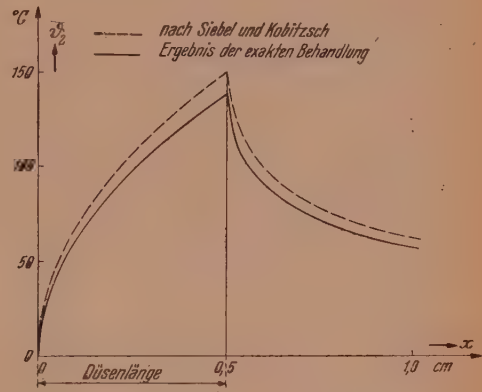
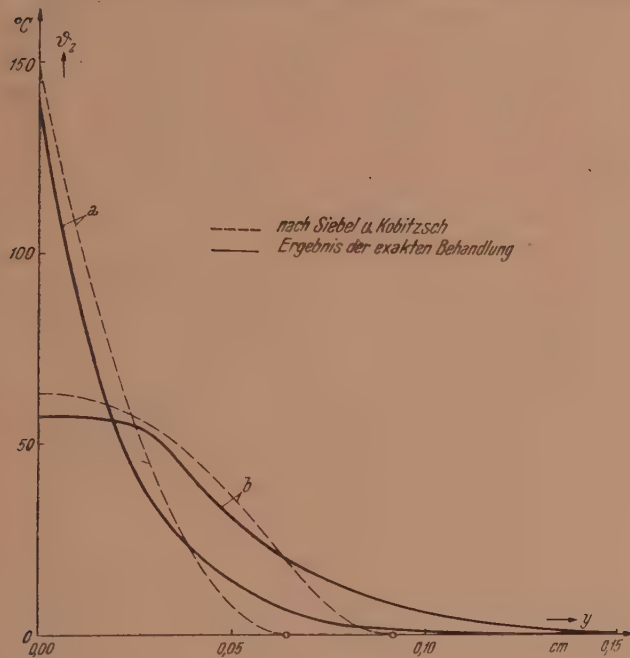


Abb. 1. Temperaturverteilung zufolge Düsenwandreibung.

a) im Austrittsquerschnitt der Ziehdüse $x_1 = 0,5$ cm

b) in der Entfernung 0,5 cm vom Düsenende; $x = 1,0$ cm

vorgegebene Werte: $k_f = 5000$ kg/cm², $\gamma = 7,8 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³, $c = 1,15 \cdot 10^{-1}$ kcal/kg[°], $\lambda = 1,25 \cdot 10^{-4}$ kcal/cm sk[°], $\mu = 0,05$, $\psi = 1,0$, $x_1 = 0,5$ cm, $v = 100$ cm/sk.

Abb. 2. Temperaturverteilung zufolge Düsenwandreibung an der

Oberfläche des Ziehgutes $\vartheta_2(x, 0)$, vorgegebene Werte wie bei Abb. 1.

Die Exaktheit der in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse ist durch die Notwendigkeit einer Reihe von vereinfachenden Annahmen zweifellos beeinträchtigt. Tatsächlich kann man aber bei der Diskussion der Endformel (15) auf den geringen Einfluß der verbleibenden Unsicherheit schließen.

Demgegenüber ist es erfreulich, darauf hinzuweisen, daß die unter weitaus größeren Annahmen entwickelten Ergebnisse von Siebel und Kobitzsch gerade für die wichtigen Randtemperaturen befriedigend bestätigt erscheinen.

(Eingegangen am 25. November 1947.)

Die Festigkeit rein radial beschauelter Kreiselverdichter-Laufräder.

Von K. J. Müller, Wien.

Mit 10 Textabbildungen.

Möglichkeiten der Berechnung gebräuchlicher Bauarten rein radial beschauelter Laufräder von Hochleistungsverdichtern werden mitgeteilt und zur Abschätzung der Beanspruchung gegebener Räder brauchbare Rechenergebnisse in dimensionsloser Form wiedergegeben. Da die Festigkeit der aus Gewichts- und Bearbeitungsgründen häufig benutzten Laufradbaustoffe auf Aluminium- oder Magnesiumbasis mit zunehmender Temperatur abnimmt, muß auch die Temperaturverteilung im Laufrad berücksichtigt werden; hierzu erforderliche Überlegungen werden angestellt.

I. Einleitung.

Der Forderung, Abmessungen, Gewicht und damit den Preis von Kreiselverdichtern zu verkleinern, wird vor allem durch Vergrößern der Stufenförderhöhen und damit

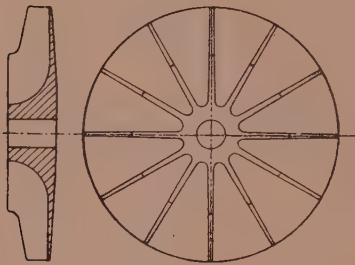


Abb. 1. Halboffenes Laufrad.

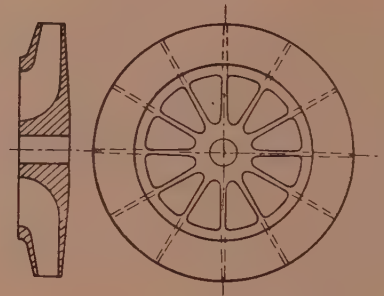


Abb. 2. Geschlossenes Laufrad.

der Umfangsgeschwindigkeiten der Laufräder entsprochen. Die Laufradbaustoffe müssen an allen Stellen bis an die Grenze des Möglichen beansprucht werden, was aber nur dann gelingen kann, wenn die durch die Massenkkräfte bei der Rotation hervorgerufenen Spannungen mit hinreichender Genauigkeit vorausbestimmbar sind.

Im Kreiselverdichterbau benutzt man meistens noch Laufräder mit nach rückwärts gekrümmten Schaufeln, welche zwischen die Radscheibe und eine Deckscheibe genietet werden. Die rückwärts gekrümmte Schaufel zeigt sich den Beanspruchungen bei höheren Umfangsgeschwindigkeiten nicht gewachsen. Eine bedeutende Steigerung der Umfangsgeschwindigkeit wird erst möglich, wenn man die Schaufeln genau radial stellt. Diese von Rateau eingeführte Bauart wird auch für die Ladeeinrichtungen von Fahr- und Flugmotoren, bei denen es auf hohe Leistungen bei kleinstem Gewicht besonders ankommt, verwendet und hauptsächlich in zwei Formen ausgeführt: „halboffen“ und „geschlossen“. Das halboffene Laufrad, Abb. 1, besteht aus einer Scheibe, die auf einer Seite mit den radial stehenden Schaufeln besetzt ist. Diese Bauart befriedigt strömungstechnisch nicht immer und man geht dann dazu über, das Laufrad beiderseits mit Radwänden entsprechend Abb. 2 zu versehen, wobei man jedoch die unsichere Nietverbindung zwischen der Scheibe und den Schaufeln gerne vermeidet. Dieses geschlossene Rad bietet naturgemäß besondere Berechnungsschwierigkeiten.

Mit beiden Laufradbauarten werden heute die höchsten Umfangsgeschwindigkeiten beherrscht. Ihre vermehrte Anwendung erscheint durchaus vertretbar, zumal die mit rein radialer Beschauelung erzielbaren Wirkungsgrade bei sorgfältiger Ausbildung

des Laufradeintrittes in einem gesonderten Vorsatzläufer ebenso hoch sind wie bei rückwärts gekrümmten Schaufeln.

Im folgenden wird zunächst die Festigkeit der für hohe Umfangsgeschwindigkeiten im allgemeinen besser geeigneten halboffenen Laufräder untersucht; dann werden Möglichkeiten der Berechnung geschlossener Räder betrachtet.

Die zulässige Beanspruchung der als Laufradbaustoff meist verwendeten Leichtmetalle hängt sehr von ihrer Temperatur ab. Um die Werkstoffanstrengung richtig beurteilen zu können, ist es deshalb notwendig, die Temperaturverteilung innerhalb des Laufrades zu ermitteln und die Beanspruchung des Rades mit der der jeweiligen Temperatur entsprechenden Festigkeit des Werkstoffes zu vergleichen. Dies wird in einem letzten Abschnitt durchgeführt.

II. Halboffene Räder.

Die Berechnung der halboffenen Räder wird meist so vorgenommen, daß man die übliche Scheibenberechnung beibehält und die Fliehkraft der Schaufeln dadurch berücksichtigt, daß man die Scheibe zusätzlich mit der Masse der Schaufeln belegt¹ oder daß man das spezifische Gewicht des Scheibenbaustoffes entsprechend abändert.² Die Unsymmetrie des einflutigen Rades wird hierbei nicht berücksichtigt. In Anlehnung an ein von Schilhansl angegebenes Verfahren zur Berechnung gerippter Kreisplatten³ ist es jedoch möglich, den unsymmetrischen Aufbau des Laufrades zu berücksichtigen und damit eine zuverlässige Berechnung durchzuführen.

Darnach denkt man sich zunächst die Schaufeln von der Scheibe losgelöst und betrachtet die Verformung von Scheibe und Schaufelstern unter Einfluß der Fliehkräfte getrennt für sich. Um den Zusammenhang wieder herzustellen, müssen an den Trennstellen statisch unbestimmte Kräfte so angebracht werden, daß an jedem Punkt der Trennfuge gleiche Verformungen von Scheibe und Schaufeln herrschen. Diese Kräfte zwischen Scheibe und Schaufeln greifen an der Scheibe entlang von Halbmessern an. Dadurch wird der rotationssymmetrische Belastungs- und Verzerrungszustand der Scheibe gestört und die Rechnungen entsprechend verwickelt. Da die Zahl der Schaufeln in Gebläserädern aber wohl immer hinreichend groß ist, darf man die Linienlasten durch eine von innen nach außen kontinuierlich über die Scheibe verteilte Flächenlast ersetzen und stellt dadurch die Rotationssymmetrie des Belastungszustandes wieder her. Die von den Schaufeln auf die Scheibe übertragenen Kräfte haben eine überwiegende Komponente in der Scheibenebene, da die Scheibe Verzerrungen in ihrer Ebene wesentlich größeren Widerstand entgegensetzt als Verbiegungen senkrecht dazu. Übertragungskräfte normal zur Scheibenfläche sollen daher vernachlässigt werden.

Der Verlauf der statisch unbestimmten Kräfte ist von vornherein nicht bekannt und muß als willkürliche Funktionenreihe mit offenen Freiwerten angenommen werden. Am einfachsten setzt man sie in Form einer Potenzreihe an, deren Koeffizienten so bestimmt werden müssen, daß die Verträglichkeitsbedingungen, welche der Zusammenhang zwischen Scheibe und Schaufeln fordert, entlang der ganzen Trennfuge erfüllt werden. Streng kann dies nur dann erreicht werden, wenn in dem Reihenansatz unendlich viel Glieder berücksichtigt werden. Dies ist praktisch nicht durchführbar. Eine gute Näherung erhält man jedoch, wenn man beide Seiten der Verträglichkeitsbedingung nach Orthogonalfunktionen entwickelt und die Koeffizienten

¹ P. Ostertag: Kolben- und Turbokompressoren, S. 229. Berlin: Springer-Verlag. 1923.

² Eck-Kearton: Turbogebälse und Kompressoren, S. 111. Berlin: Springer-Verlag. 1929.

³ M. Schilhansl: Die mitttragende Breite bei der Kreisplatte mit radialen Rippen. VDI-Forschungsh. 411.

von Funktionen derselben Ordnung vergleicht. Dadurch gewinnt man ein Gleichungssystem, aus dem sich die gesuchten Freiwerte bestimmen lassen.

1. Die Verzerrung der Scheibe.

Ist die Scheibendicke h und deren Änderung entlang dem Halbmesser r gering, so kann der Spannungszustand, der durch Kräfte, die in der Scheibenebene wirken, hervorgerufen wird, näherungsweise als quasi-ebener Spannungszustand betrachtet werden. Das Gleichgewicht an einem Scheibenelement verlangt dann

$$\frac{d}{dr} (r h \sigma_r) - h \sigma_t + r X = 0.$$

Hierin bedeuten: σ_r die radiale Normalspannungskomponente, σ_t die tangentielle Normalspannungskomponente, X die äußere Kraft je Flächenelement der Scheibenmittelfläche in radialer Richtung.

In einem ebenen, rotationssymmetrischen Spannungszustand folgt der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verschiebungen den Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Setzt man dies in die obige Gleichgewichtsbedingung ein, so ergibt sich die bekannte Differentialgleichung der radialen Scheibendehnung⁴

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r} \right) \frac{du}{dr} + \left(\frac{\nu}{h} \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{u}{r} + \frac{X}{h} \frac{1-\nu^2}{E} = 0. \quad (2)$$

Für die hier meistens zur Anwendung kommenden hyperboloidischen Scheiben lautet der Ausdruck für den Profilverlauf

$$h = C \left(\frac{r}{a} \right)^{-\beta}. \quad (3)$$

Eine vorgegebene Scheibe kann durch eine hyperboloidische Scheibe näherungsweise ersetzt werden. In diesem Fall wird der Exponent β als das mittlere Neigungsmaß der in logarithmischen Maßstäben über dem Radius aufgetragenen Scheibendicke angenähert gefunden.

Wird der dimensionslose Radius $x = \frac{r}{a}$ (a = Außenradius der Scheibe) eingeführt und für h der Ausdruck (3) eingesetzt, so lautet die Differentialgleichung (2)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1-\beta}{x} \frac{du}{dx} - \frac{1+\nu\beta}{x} \frac{u}{x} + a^2 \frac{1-\nu^2}{E} \frac{X}{h} = 0. \quad (4)$$

Nunmehr sind für X die Ausdrücke für die Belastungen der Scheibe einzusetzen. Die lineare Abhängigkeit der Spannungen von den angreifenden Kräften gestattet es, die verschiedenen Einflüsse getrennt zu betrachten und die Ergebnisse zu superponieren. Durch diese Zerlegung wird die praktische Berechnung bedeutend vereinfacht.

Unter dem Einfluß der bei der Rotation entstehenden Massenkkräfte wird die Belastung je Flächenelement der Scheibenmittelfläche

$$X = \frac{\gamma}{g} h a x \omega^2.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung (4) sind in diesem Fall bekannt.⁴ Sie lauten

$$u_I = K_1 x^{e_1} + K_2 x^{e_2} - \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot \frac{a^3 (1-\nu^2)}{E [8 - (3+\nu)\beta]} x^3. \quad (5)$$

⁴ I. Malkin: Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben. Berlin: Springer-Verlag. 1933.

mit

$$s_1 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \beta \nu + 1}; \quad s_2 = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \beta \nu + 1}. \quad (6)$$

Damit folgen die Ausdrücke für die Spannungen gemäß (1) zu

$$\sigma_r = \frac{E}{a(1-\nu^2)} \left[K_1(s_1 + \nu) x^{s_1-1} + K_2(s_2 + \nu) x^{s_2-1} - \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot \frac{a^3(3+\nu)(1-\nu^2)}{E[8-(3+\nu)\beta]} x^2 \right]. \quad (7)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{a(1-\nu^2)} \left[K_1(\nu s_1 + 1) x^{s_1-1} + K_2(\nu s_2 + 1) x^{s_2-1} - \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot \frac{a^3(1+3\nu)(1-\nu^2)}{E[8-(3+\nu)\beta]} x^2 \right]. \quad (8)$$

Die Konstanten K_1 und K_2 bestimmen sich aus den Bedingungen für kräftefreie Ränder: $\sigma_r = 0$ am Außenrand $x = 1$ und $\sigma_r = 0$ an der Bohrung $x = x_0$. Die einfache Rechnung liefert

$$K_1 = \frac{\gamma a^3 \omega^2}{E g} \cdot \frac{(3+\nu)(1-\nu^2)}{8-(3+\nu)\beta} \cdot \frac{x_0^{s_2-1} - x_0^2}{(s_1 + \nu)(x_0^{s_2-1} - x_0^{s_1-1})},$$

$$K_2 = - \frac{\gamma a^3 \omega^2}{E g} \cdot \frac{(3+\nu)(1-\nu^2)}{8-(3+\nu)\beta} \cdot \frac{x_0^{s_1-1} - x_0^2}{(s_2 + \nu)(x_0^{s_2-1} - x_0^{s_1-1})}, \quad (9)$$

womit die Gl. (5) für die Verzerrung der Scheibe unter Einfluß der Fliehkräfte ausgerechnet werden kann.

Auf die gleiche Weise erhält man einen Ausdruck für die Verformung der Scheibe unter dem Einfluß der Kräfte, die von den Schaufeln eingeleitet werden. Die auf das Flächenelement bezogene Belastung hat hier die Form

$$X = \frac{k P}{2 \pi r} [\text{kg/cm}]. \quad (10)$$

Darin bedeutet k die Anzahl der Schaufeln, während P die von einer einzelnen Schaufel auf die Scheibe je Längeneinheit ihres Halbmessers übertragene Kraft ist. Für diese werde der Ansatz

$$P = \sum_{n=0}^n c_n \left(\frac{r}{a} \right)^n \quad (11)$$

gemacht. Die Differentialgleichung (4) lautet dann

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1-\beta}{x} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{1+\nu\beta}{x} \frac{u}{x} = -a \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{k}{2\pi C} \sum_{n=0}^n c_n x^{n+\beta-1}. \quad (12)$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung, die man durch Nullsetzen der rechten Seite von (12) erhält, ist die gleiche wie vorhin, nämlich

$$u = K_3 x^{s_1} + K_4 x^{s_2}. \quad (13)$$

s_1 und s_2 sind wieder durch (6) gegeben. Die vollständige Lösung der Gl. (12) ist noch um ein partikuläres Integral vermehrt. Dieses kann man gewinnen, indem man den Ansatz

$$u_0 = \sum_{n=0}^m c_n x^n$$

mit seiner ersten und zweiten Ableitung in die Differentialgleichung einsetzt. Man findet durch Vergleichen der entsprechenden Größen

$$m = n + \beta + 1,$$

$$c_m = - \frac{B}{E} \cdot \frac{c_n}{n^2 + 2n + \beta n + \beta - \nu\beta} \quad \text{mit} \quad B = (1-\nu^2) \frac{a k}{2\pi C}, \quad (14)$$

worin C , wie erinnerlich, aus Gl. (3) folgt. Die vollständige Lösung von (12) lautet mithin

$$u_{II} = K_3 x^{s_1} + K_4 x^{s_2} - \frac{B}{E} \sum_0^n \frac{x^{n+\beta+1}}{n^2 + 2n + \beta n + \beta - \beta \nu} c_n. \quad (15)$$

Führt man diesen Ausdruck für die Verzerrung samt seiner ersten Ableitung in (1) ein, so folgen die entsprechenden Spannungen zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{a(1-\nu^2)} \left[K_3 (s_1 + \nu) x^{s_1-1} + K_4 (s_2 + \nu) x^{s_2-1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B}{E} \sum_0^n \frac{n + \beta + 1 + \nu}{n^2 + 2n + \beta n + \beta - \nu \beta} c_n x^{n+\beta} \right], \\ \sigma_t &= \frac{E}{a(1-\nu^2)} \left[K_3 (\nu s_1 + 1) x^{s_1-1} + K_4 (\nu s_2 + 1) x^{s_2-1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B}{E} \sum_0^n \frac{\nu(n + \beta + 1) + 1}{n^2 + 2n + \beta n + \beta - \nu \beta} c_n x^{n+\beta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Am Außenrand sowie an der Bohrung ist die Scheibe kräftefrei, d. h. dort wird $\sigma_r = 0$. Aus diesen Bedingungen lassen sich die Konstanten K_3 und K_4 bestimmen. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} K_3 &= \frac{B}{E} \sum_0^n \frac{x_0^{s_2-1} - x_0^{n+\beta}}{(s_1 + \nu)(x_0^{s_2-1} - x_0^{s_1-1})} \cdot \frac{n + \beta + 1 + \nu}{n^2 + 2n + \beta n + \beta - \nu \beta} c_n, \\ K_4 &= -\frac{B}{E} \sum_0^n \frac{x_0^{s_2-1} - x_0^{n+\beta}}{(s_2 + \nu)(x_0^{s_2-1} - x_0^{s_1-1})} \cdot \frac{n + \beta + 1 + \nu}{n^2 + 2n + \beta n + \beta - \nu \beta} c_n. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Damit ist die Verzerrung (15) der Scheibe unter dem Einfluß der von den Schaufeln eingeleiteten Lasten vollständig gegeben.

In manchen Fällen ist es nötig, die Verformung der Scheibe unter dem Einfluß einer Last am Innenrand zu kennen. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn die Scheibe mit der Pressung p_0 auf die Welle aufgeschraubt wird. Die Scheibe selbst bleibt bei der Betrachtung dieses Einflusses unbelastet, in der Differentialgleichung (12) entfällt also die Störungsfunktion und die Lösung gibt Gl. (13) wieder. Die Konstanten ermitteln sich aus den Bedingungen $\sigma_r = -p_0$ für $x = x_0$ und $\sigma_r = 0$ für $x = 1$. Sie ergeben sich zu

$$\begin{aligned} K_5 &= \frac{a}{E} \cdot \frac{1 - \nu^2}{(s_1 + \nu)(x_0^{s_2-1} - x_0^{s_1-1})} p_0, \\ K_6 &= -\frac{a}{E} \cdot \frac{1 - \nu^2}{(s_2 + \nu)(x_0^{s_2-1} - x_0^{s_1-1})} p_0 \end{aligned}$$

und damit wird die Verformung unter dem Einfluß der Schrumpfpresung

$$u_{III} = \frac{1 - \nu^2}{x_0^{s_2-1} - x_0^{s_1-1}} a p_0 \left(\frac{x^{s_1}}{s_1 - \nu} - \frac{x^{s_2}}{s_2 + \nu} \right). \quad (18)$$

Nun kann die Verzerrung der Scheibe unter dem Einfluß aller angreifenden Kräfte in der Form

$$u_s = u_I + u_{II} + u_{III} \quad (19)$$

angeschrieben werden.

2. Die Verzerrung der Schaufeln.

Um zu möglichst einfachen Ausdrücken zu kommen, werden die Schaufeln als einfacher Balken betrachtet, obwohl sie manchmal im Vergleich zur Länge ziemlich breit sind und daher als Platte betrachtet werden sollten. Die Vernachlässigung des Schubeinflusses, die dabei gemacht wird, wirkt sich jedoch im Verhältnis zu den übrigen hier vorgenommenen Annäherungen so wenig aus, daß der erhebliche Rechen-

aufwand, den eine Betrachtung der Schaufeln als rechteckige Platten erfordert, hier wohl nicht zu vertreten ist. Mit derselben dimensionslosen Veränderlichen $x = \frac{r}{a}$ wie früher wird die Spannung in irgend einem Querschnitt $f = b \cdot h_R$ unter Einfluß der Fliehkräfte

$$\sigma_{IV} = \frac{\gamma a^2 \omega^2}{g} \cdot \frac{1}{f} \int_x^1 x f dx \quad (20)$$

und die Verschiebung, wenn der untere Schaufelrand $x = x_0$ festgehalten gedacht ist,

$$u = \frac{a}{E} \int_{x_0}^x \sigma dx. \quad (21)$$

Bei unveränderlichem Schaufelquerschnitt erhält man

$$u_{IV} = \frac{\gamma a^2 \omega^2}{g} \cdot \frac{a}{E} \left(\frac{x_0^3 - 3 x_0}{6} - \frac{x^3 - 3 x}{6} \right). \quad (22)$$

Dieser Verzerrung unter dem Einfluß der Fliehkräfte überlagert sich die Verzerrung, welche die von der Scheibe übertragenen Schubkräfte auslösen. Diese Kräfte greifen am Schaufelrand $z = \frac{h_R}{2}$ an und haben hier entgegengesetztes Vorzeichen wie an der Scheibe. Es wird

$$\sigma_V = -\frac{a}{f} \int_x^1 \sum_0^n c_n x^n dx - \frac{6 a}{b h_R^2} \int_x^1 \frac{h_R}{2} \sum_0^n c_n x^n dx \quad (23)$$

und damit erhält man für konstanten Schaufelquerschnitt nach einfacher Rechnung gemäß (21)

$$u_V = -\frac{4 a^2}{E b h_R} \left[\sum_0^n \frac{x - x_0}{n+1} c_n - \sum_0^n \frac{x^{n+2} - x_0^{n+2}}{(n+1)(n+2)} c_n \right]. \quad (24)$$

Die Verformung der Schaufeln an den Trennstellen beträgt demnach als Summe von u_{IV} und u_V bei unveränderlichem Schaufelquerschnitt

$$u_R = -\frac{4 a^2}{f} \sum_0^n \left(\frac{x - x_0}{n+1} - \frac{x^{n+2} - x_0^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \right) c_n + \frac{\gamma a^2 \omega^2}{g} \cdot \frac{a}{E} \left(\frac{x - x_0}{2} - \frac{x^3 - x_0^3}{6} \right). \quad (25)$$

Vielfach wird man die vereinfachende Annahme unveränderlichen Schaufelquerschnittes fallen lassen müssen. Da die Schaufelform meist zeichnerisch vorliegt, lassen sich dann die Integrale in den Ausdrücken (20), (23) und (21) durch numerische oder graphische Verfahren auswerten. In einem solchen allgemeinen Fall werden auch die Schwerpunkte der einzelnen Schaufelquerschnitte nicht auf einer zur Drehachse senkrechten Geraden liegen. Dies hat zur Folge, daß zusätzliche Biegemomente und Biegespannungen entstehen; ihre Größe wird wegen der meistens geringen Abweichung der Schwerpunktslinie von einer radialen Geraden vernachlässigbar klein sein. Gegebenenfalls ist ihre Berücksichtigung jedoch leicht zu übersehen und bietet keine Schwierigkeiten.

3. Die Ermittlung der statisch unbestimmten Kräfte.

Wenn keine Klaffung zwischen Scheibe und Schaufeln eintreten soll, so muß an allen Stellen der Trennfuge gleiche Dehnung von Scheibe und Schaufeln herrschen. Beachtet man, daß in den Ausdrücken für die Dehnungen der Schaufeln deren unterer Rand $x = x_0$ festgehalten gedacht ist, so lautet diese Verträglichkeitsbedingung

$$u_R = u_S - u_{S_0}. \quad (26)$$

Ferner muß die Fliehkraft einer Schaufel mit der Summe aller angreifenden Kräfte im Gleichgewicht stehen. Es muß also auch noch die Bedingung

$$\frac{\gamma a^2 \omega^2}{g} \int_{x_0}^1 x f dx = a \int_{x_0}^1 P dx \quad (27)$$

erfüllt sein. Aus diesen beiden Beziehungen können die unbekannten Koeffizienten c_n in dem Ausdruck (11) für die Verbindungskräfte ermittelt werden. Wie eingangs erwähnt, geschieht dies mit Schilhansl³ in der Weise, daß man beide Seiten von (26) in Orthogonalfunktionen entwickelt. Dann ist die Bedingung (26) nur erfüllt, wenn die Funktionen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselben Entwicklungskoeffizienten haben. Diese Forderung liefert im Verein mit der Bedingung (27) eine genügende Anzahl von linearen Beziehungen zwischen den Unbekannten c_n , um diese ermitteln zu können.

Im vorliegenden Fall eignen sich als Entwicklungsfunktionen besonders orthogonale Polynome, die — da Ausdrücke mit Potenzgliedern entwickelt werden sollen — eine einfache Berechnung der Koeffizienten ermöglichen. Es wird daher eine Entwicklung nach Kugelfunktionen^{3, 5} gewählt. Diese Entwicklung wird im Intervall $+1, -1$ vorgenommen. Um eine Koordinatentransformation zu vermeiden, sollen für den Augenblick auch negative Werte des dimensionslosen Halbmessers x zugelassen werden. Da der Übergang zu diametral gegenüberliegenden Scheibenpunkten in Polarkoordinaten durch Kreisbewegung senkrecht zum Halbmesser erfolgt, wobei u sein Vorzeichen nicht wechselt, werde festgelegt, daß, wenn x durch $-x$ ersetzt wird, u sein Vorzeichen nicht wechselt; u ist dann eine gerade Funktion. Diese an sich willkürliche Festlegung, die nur zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten benötigt wird, bringt es mit sich, daß die Entwicklung nur Funktionen gerader Ordnung enthält.⁶ In den Ausdrücken für die Verschiebungen kommen nur Glieder von der Form x^p vor, die also durch

$$x^p = a_0 P_0(x) + a_2 P_2(x) + a_4 P_4(x) + \dots$$

angenähert werden. Die Koeffizienten a_0, a_2, \dots, a_4 bestimmt man aus

$$a_i = (2i + 1) \int_0^1 P_i(x) x^p dx \quad (28a)$$

durch Zerlegung des Legendreschen Polynoms $P_i(x)$ in seine Summanden. Ist der Exponent p eine negative Zahl, so wird der Integrand für $x = 0$ unendlich und das Integral in (28) uneigentlich. Beachtet man, daß für $0 < x < x_0$, d. h. innerhalb der Bohrung der Scheibe, u keine reale Bedeutung hat, so ergibt sich ein einfacher Weg, diese Schwierigkeit zu überbrücken, indem man in der Nähe von $x = 0$ die Kurve x^{-p} durch ein endlich bleibendes Kurvenstück, am einfachsten durch eine Gerade, ersetzt. Die Funktion, welche nach Kugelfunktion zu entwickeln ist, lautet dann $u = \varepsilon^{-p}$ für $0 < x < \varepsilon$ und $u = x^{-p}$ für $\varepsilon < x < 1$. Die Gl. (28) für die Entwicklungskoeffizienten hat damit die Form

$$a_i = (2i + 1) \left[\int_0^\varepsilon P_i(x) \varepsilon^{-p} dx + \int_\varepsilon^1 P_i(x) x^{-p} dx \right]. \quad (28b)$$

Liegt die Verzerrung der Schaufeln nicht in einem geschlossenen Ausdruck vor, so kann die Entwicklung durch numerische Auswertung der Integrale (28) erfolgen.

Man ist damit in der Lage, die Entwicklung von (19) und (25) in Kugelfunktionen-

⁵ Geiger-Scheel: Handbuch der Physik, Bd. III, S. 534. Berlin: Springer-Verlag. 1928.

⁶ Man könnte gleichermaßen u als ungerade Funktion annehmen. Für die weitere Rechnung ist es jedoch belanglos, ob u als gerade oder ungerade Funktion angesetzt wird, da u selbst nur in dem Bereich $x = 0$ bis $x = +1$ betrachtet wird.

reihen anzugeben. Das Einsetzen dieser Ausdrücke in die Bedingung (26) und die Gleichsetzung der Faktoren von P_0 , P_2 usw. bereitet keine Schwierigkeiten. Hat man aus dem so erhaltenen Gleichungssystem die Freiwerte c_n in dem Ausdruck für die Verbindungskräfte ermittelt, so kann der Spannungszustand in jedem Punkt der Scheibe mit Hilfe der Gl. (7), (8) und (16) und der Schaufeln aus den Ausdrücken (20) und (23) gleich gefolgert werden. Die Scherspannungen zwischen der Scheibe und einer Schaufel werden $\tau = \frac{P}{b}$.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch vermerkt, daß man die Aufgabe auch auf elementare Weise einer Näherungslösung zuführen kann, indem man sich darauf beschränkt, die Verträglichkeitsbedingung (26) nur an einzelnen Punkten statt

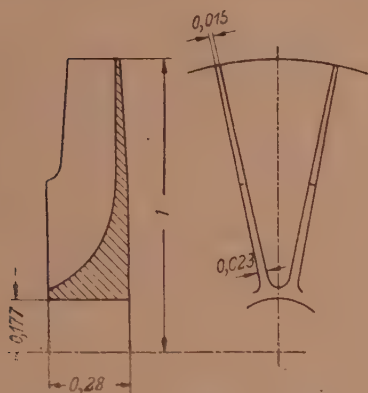


Abb. 3. Beispielsweise Abmessungen eines halboffenen Laufrades.

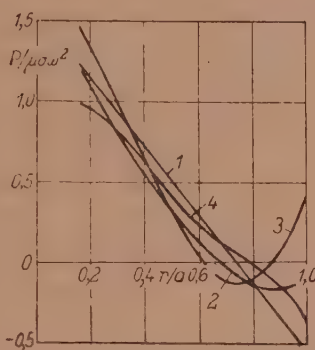


Abb. 4. Verlauf der Scherkräfte zwischen Scheibe und Schaufeln eines halboffenen Rades bei verschiedenen Annäherungsgraden.

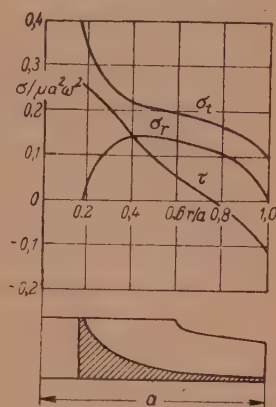


Abb. 5. Spannungsverteilung in einem halboffenen Laufrad mit 16 Schaufeln.

kontinuierlich entlang der ganzen Trennfuge zu erfüllen. Man ermittelt die Verzerrung der Scheibe und der Schaufeln an diesen passend gewählten Punkten und geht damit jeweils in die Gl. (26) ein. Für n Punkte gewinnt man dadurch n Gleichungen, die es wieder im Verein mit Gl. (27) ermöglichen, die $n + 1$ -Freiwerte von (11) auszurechnen. Um brauchbare Resultate zu erzielen, empfiehlt es sich, n nicht kleiner als 4 zu wählen. Man hat dann fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten zu lösen, eine etwas langwierige Aufgabe. Der Vorteil des erstgenannten Verfahrens ist es, auch schon für $n = 1$, also bei verhältnismäßig geringem Rechenaufwand, einen einigermaßen brauchbaren mittleren Verlauf der statisch unbestimmten Kräfte zu liefern.

Um ein Bild über die Konvergenz zu gewinnen, werde der Verlauf der Scherkräfte bei Berücksichtigung von zwei, drei, vier und fünf Gliedern in dem Ansatz für P betrachtet. Als Beispiel diene ein 16schaufeliges Rad von der in Abb. 3 angegebenen Form, dessen Scheibendicke das Gesetz $h = 0,13 x^{-2}$ befolgt. Die Rechenergebnisse sind in Abb. 4 in dimensionsloser Darstellung eingetragen. Man entnimmt diesem Schaubild, daß die Konvergenz des Verfahrens tatsächlich so gut ist, daß auch Ansätze mit wenig Gliedern für praktische Zwecke ausreichen. Lediglich in der Nähe des Außenrandes der Scheibe ergeben sich größere Abweichungen. An dieser Stelle treten jedoch keine großen Spannungen auf, wie man Abb. 5, in welcher die in dem Laufrad auftretenden Spannungen ebenfalls in dimensionsloser Form aufgetragen sind, entnehmen kann, so daß diese Eigenschaft nicht sehr ins Gewicht fällt.

Weicht die geometrische Form eines zu berechnenden Laufrades von der Form Abb. 3 nicht allzusehr ab, so kann man die Spannungsverteilung mit Hilfe der Darstellung Abb. 5 rasch abschätzen. Ergibt dieser Überschlag hohe Beanspruchungen, so muß die endgültige Laufradform durch eine genaue Festigkeitsrechnung überprüft werden.

III. Geschlossene Laufräder.

Die geschlossenen Verdichterlaufräder werden meist so ausgeführt, daß Laufradscheibe, Schaufeln und Deckscheibe durch Nietung miteinander verbunden werden, wobei die Nietzapfen vielfach aus den Schaufeln herausgearbeitet werden. Diese Bauart ist jedoch höchsten Beanspruchungen wegen der gefährlichen Spannungsspitzen, die an den Nietlöchern entstehen, nicht gewachsen. Man vermeidet die unsichere Nietverbindung, indem man Scheiben und Schaufeln aus einem Stück fräst und eine Teilung in einer etwa in der Mitte der Schaufelaustrittsbreite gelegenen, zur Drehachse normalen Ebene vornimmt, oder aber indem man das ganze Laufrad einteilig durch Ausfräsen aus dem Vollen herstellt, was bei rein radialer Beschaukelung verhältnismäßig einfach durchführbar ist.

Bei der Teilung des Rades in seiner Mittelebene bildet die meistens konische Deckscheibe mit dem Schaufelstern ein speichenradartiges Gebilde. Seine Berechnung mit Hilfe der Theorie der anisotropen Kegelschale und Versuche, bei denen zur Nachprüfung der Rechenergebnisse die Verformungen der Deckscheibe während des Betriebes gemessen wurden, mögen einer besonderen Mitteilung vorbehalten bleiben.

Die Spannungsverteilung in genieteten und in einteilig hergestellten Rädern wird sich im wesentlichen nur durch die an den Nietlöchern auftretenden Spannungsspitzen voneinander unterscheiden. Eine genaue Berechnung solcher Räder bietet so erhebliche Schwierigkeiten, daß man für praktische Zwecke wohl immer auf Abschätzungen angewiesen sein wird. Ist die Deckscheibe des Laufrades konisch, so kann man sich beispielsweise das Rad durch einen Schnitt nahe der vollen Scheibenwand in zwei Teile zerlegt denken und die Deckscheibe samt dem Schaufelstern, dessen Schaufeln nun sehr hoch sind, als anisotrope Kegelschale berechnen. Liegen die so ermittelten Beanspruchungen innerhalb der zugelassenen Grenzen, so darf man sicher sein, daß auch im vollständigen Laufrad keine höheren Spannungen auftreten, denn durch das Wiederaufsetzen der Scheibe wird ja eine wesentliche Versteifung erzielt.

Günstigere Voraussetzungen für die Berechnung liegen bei Laufrädern vor, deren Deckscheibe eben ist bzw. näherungsweise als eben betrachtet werden kann, so daß kein Bestreben zum Umstülpen eintritt, oder deren Deckscheibe geringe radiale Erstreckung hat. Man kann dann das früher angewendete Verfahren entsprechend erweitern. Zu diesem Zweck löst man die Verbindung zwischen den Schaufeln und der Radscheibe einerseits und zwischen den Schaufeln und der Deckscheibe andererseits und untersucht diese Teile getrennt unter dem Einfluß der auf sie wirkenden Belastungen. Die Klaffung zwischen der Radscheibe und den Schaufeln wird durch kontinuierlich verteilte Kräfte zum Schließen gebracht, genau so wie das bei der Berechnung des halboffenen Rades erfolgt. Um den Rechenumfang in mäßigen Grenzen zu halten, werde der Zusammenhang der Schaufeln mit der Deckscheibe nicht durch Kräfte, die sich über die Trennfuge verteilen, hergestellt, sondern nur durch Einzelkräfte, die im Schwerpunkt des Deckscheibenquerschnittes angreifen mögen.

An der Radscheibe wirken demnach gleichartige Kräfte wie im Falle des halboffenen Laufrades, ihre Verzerrung ist daher durch Gl. (19) gegeben. Die Verzerrung des der Radscheibe zugekehrten Schaufelrandes ändert sich gegenüber früher um den Anteil, der von der Kraft herrührt, die von der Deckscheibe eingeleitet wird. Die

von dieser Kraft hervorgerufene Spannung beträgt an einer beliebigen Stelle dieses Schaufelrandes (vgl. Abb. 6)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{VI} &= \frac{Q}{f} - \frac{6}{b h_R^2} Q e_s \quad \text{für } x_0 < x < x_s, \\ \sigma_{VI} &= 0 \quad \text{für } x_s < x < 1, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

woraus gemäß Gl. (21) die Verschiebung u_{VI} folgt.

Ferner hat man die Verschiebung der Schaufeln im Angriffspunkt der Deckscheibenlast zu suchen. Diese Verzerrung wird

$$u_{R2} = \frac{a}{E} \int_{x_0}^{x_s} \sigma dx, \quad (30)$$

darin setzt sich σ aus den Anteilen, die von den verschiedenen wirksamen Kräften herrühren, zusammen. Die Fliehkraftspannungen sind wieder durch Gl. (20) gegeben, während die Spannungen, welche die Verbindungskräfte zur Radscheibe hervorrufen, hier die Form haben

$$\sigma = -\frac{a}{f} \int_{x_0}^1 \sum_0^n c_n x^n dx + \frac{6a}{b h_R^2} \int_{x_0}^1 \frac{h_R}{2} \sum_0^n c_n x^n dx. \quad (31)$$

Schließlich rührt noch von der Deckscheibe der Anteil

$$\sigma = \frac{Q}{f} + \frac{6}{b h_R^2} Q e_s$$

her.

Die Berechnung der Deckscheibe kann dadurch sehr vereinfacht werden, daß man Verzerrungen des Querschnittes in seiner Ebene vernachlässigt. Es liegt dann ein Ring vor, auf dem außer den Fliehkäften die über den Umfang, gleichmäßig aufgeteilten Verbindungskräfte zu den Schaufeln wirken. Die Aufweitung der Deckscheibe am Schwerpunkthalbmesser ergibt sich dann nach einfacher Rechnung zu

$$u_D = \frac{r_s}{E} \left(\frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 - \frac{k Q}{2 \pi F_D} \right). \quad (32)$$

Man ist nunmehr in der Lage, die Bedingungen anzuschreiben, welche der Zusammenhang zwischen den einzelnen Teilen des Laufrades fordert. Sie lauten

$$u_s = u_{R1} + u_{s0}. \quad (33)$$

$$u_D = u_{R2} + u_{s0}. \quad (34)$$

$$a \frac{\gamma \omega^2}{g} \int_{x_0}^1 f x dx + Q = a \int_{x_0}^1 P dx. \quad (35)$$

Die erste Bedingung entspricht der früheren Gl. (26), wobei hier sinngemäß

$$u_{R1} = u_{IV} + u_V + u_{VI}$$

bedeutet. Die zweite Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen der Deck-

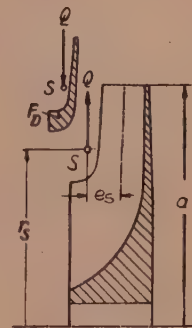


Abb. 6. Bezeichnungen am geschlossenen Laufrad.

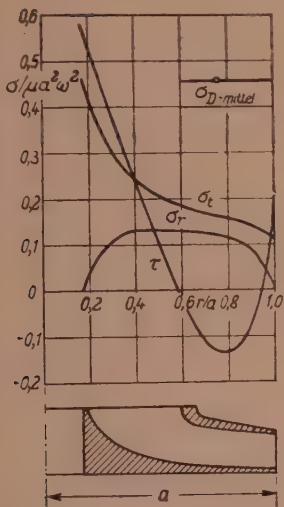


Abb. 7. Spannungsverteilung in einem geschlossenen 16schaufeligen Laufrad.

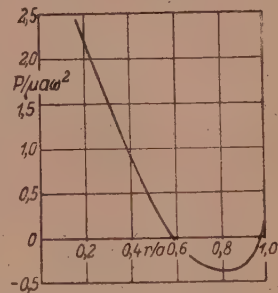


Abb. 8. Verlauf der Scherkräfte zwischen Radscheibe und Schaufeln eines geschlossenen, einteiligen Laufrades.

scheibe und den Schaufeln und die dritte das Gleichgewicht der an einer Schaufel angreifenden Kräfte.

Mit Hilfe dieser Beziehungen können die Freiwerte c_n von P nach Gl. (11) sowie Q entweder durch Entwicklung beider Seiten von Gl. (33) in Kugelfunktionen oder aber elementar, indem man verlangt, daß die Bedingung (33) nur an einigen Stellen der Trennfugen zwischen der Radscheibe und den Schaufeln erfüllt werde. Der letzte Weg trifft die Verhältnisse bei eingenieteten Schaufeln gut, wenn als Bezugspunkte die Nietstellen gewählt werden.

Versieht man beispielsweise das früher berechnete halboffene 16schaufelige Lauf- rad mit einer Deckscheibe etwa nach Abb. 7 unten, so tritt in dem Rad der in Abb. 8 eingetragene Verlauf der Scherkräfte entlang der Verbindung Schaufeln—Radscheibe auf, womit sich in der Radscheibe und entlang der Schaufelwurzeln der in Abb. 7 wiedergegebene Spannungsverlauf ergibt. Der Vergleich mit Abb. 5 zeigt die größere Beanspruchung des geschlossenen, einteilig hergestellten Rades gegenüber dem sonst gleichgeformten halboffenen.

Wird das Rad genietet, so treten an den Nietlöchern Spannungsspitzen in der Größenordnung

$$\sigma_{\max} = 3 \sigma_r - \sigma_t \quad \text{bzw.} \quad 3 \sigma_t - \sigma_r$$

entsprechend den Überlegungen von Stodola⁷ auf. Sie sind selbst im günstigsten Fall doppelt so groß wie die Grundspannungen in der Scheibe; daraus erhellt, daß für höchste Umfangsgeschwindigkeiten die Nietverbindung ungeeignet ist. Es kommen dann nur einteilig hergestellte oder sorgfältig hartgelötete bzw. geschweißte Konstruktionen in Frage.

IV. Die Festigkeit eines Laufrades bei Berücksichtigung der Erwärmung.

Hauptsächlich des geringen Gewichtes und der leichten Bearbeitbarkeit wegen werden für hochbeanspruchte Verdichterlaufräder überwiegend Leichtmetalle verwendet. Es kommen in erster Linie Al-Cu- und Al-Cu-Mg-Legierungen in Betracht. Bei den angestrebten großen Stufenförderhöhen ist die Temperaturerhöhung der Luft innerhalb des Laufrades infolge der Verdichtungswärme beträchtlich, wodurch das Laufrad ebenfalls erhöhte Temperaturen annimmt. Die Festigkeit der Leichtmetalllegierungen nimmt jedoch schon bei verhältnismäßig geringer Erwärmung sehr ab, so daß zur Beurteilung der Beanspruchung eines Laufrades die an einer Stelle tatsächlich auftretenden Spannungen mit der Festigkeit des Laufradbaustoffes bei der an dieser Stelle herrschenden Temperatur zu vergleichen sind. Durch die ungleichmäßige Erwärmung des Laufrades treten in diesem außerdem noch Wärmespannungen auf, die sich den Fliehkraftspannungen überlagern. Es ist daher wünschenswert, sich über die Temperaturverteilung in einem Verdichterlaufrad wenigstens annähernd Aufschluß zu verschaffen.

Zu diesem Zweck werde eine Scheibe betrachtet, die auf der einen Seite, der Radrückseite, mit Luft von unveränderlicher Temperatur bespült wird und auf der anderen Seite, also innerhalb des eigentlichen Laufrades, von Luft durchströmt werde, deren Temperatur sich von innen nach außen nach einem bestimmten Gesetz ändert. Die Temperaturerhöhung innerhalb eines radial beschaufelten Laufrades ist gegeben durch⁸

⁷ A. Stodola: Dampf- und Gasturbinen. Berlin: Springer-Verlag. 1924.

⁸ W. van der Nüll: Überlegungen zur Frage der größtmöglichen Förderhöhe einstufiger Radiallager. Luftwissen 7, 174 (1940).

⁹ K. Marguerre: Temperaturverlauf und Wärmespannungen in platten- und schalenförmigen Körpern. Ing.-Arch. 7, 216 (1937).

$$\Delta t_L = q_{ad} \frac{u_2^2 A}{g \eta_{i-ad} \cdot c_p} \quad (36)$$

Die Verteilung dieses Temperaturanstieges zwischen Laufradein- und -austritt kann schwer erfaßt werden. Sie soll entsprechend dem Ausdruck (36) in der Form

$$t_1 = t_0 + q_{ad} \frac{A \omega^2}{g \eta_{i-ad} \cdot c_p} r^2 \quad (37)$$

angesetzt werden. Hierin bedeutet q_{ad} die adiabatische Güteziffer, η_{i-ad} den adiabatischen Wirkungsgrad und A das mechanische Wärmeäquivalent. Dieser einfache, offenbar nur für einen Stromfaden gültige Ausdruck trifft insbesondere in der Radmitte nicht die tatsächlichen Verhältnisse, denn innerhalb des Laufradeintritts-Durchmessers muß ja annähernd gleichmäßig die Eintrittstemperatur der Luft herrschen. Als ideales Verhalten darf jedoch das Gesetz (37) angenommen werden, um so mehr, als die Temperaturverteilung hauptsächlich in den äußeren, stärker erwärmten Teilen der dünnwandigen Scheibe interessiert. Daher soll auch die Berechnung erst von einem bestimmten Radius r_1 ab erfolgen.

Für die hier vorgenommene abschätzende Betrachtung wird weiters eine Scheibe gleicher Dicke vorausgesetzt.

Die stationäre Temperaturverteilung in einem homogenen Körper folgt — wie jeder Zustand in einem Kontinuum — der Potentialgleichung, welche bei Rotations-symmetrie in Polarkoordinaten die folgende Form hat

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0. \quad (38)$$

Die Temperaturverteilung soll durch den Verlauf der mittleren, entlang der Scheibendicke herrschenden Temperatur gekennzeichnet werden. Man gewinnt dafür einen Ausdruck, indem man Gl. (38) über die Scheibendicke integriert⁹

$$\int \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} dz + \int \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} dz + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \left[-\frac{h}{2} \right]_{+\frac{h}{2}} = 0$$

und dann den Ausdruck $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ durch die Wärmeübergangsbedingung an den Oberflächen $z = \pm \frac{h}{2}$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\alpha}{\lambda} (t - \vartheta)$$

(t = Außentemperatur) ersetzt. Setzt man noch die Differentiationszeichen vor die Integrale — dies ist hier wegen der konstanten Integrationsgrenzen ohne weiteres möglich —, so ergibt sich

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} \int \vartheta dz + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int \vartheta dz + \frac{\alpha_1}{\lambda} (t_1 - \vartheta_1) - \frac{\alpha_2}{\lambda} (t_2 - \vartheta_2) = 0. \quad (39)$$

Darin bezeichnen t_1 und t_2 die Temperatur der Luft an beiden Scheibenseiten bzw. ϑ_1 und ϑ_2 die Oberflächentemperatur der beiden Scheibenseiten. Da die hier betrachteten Scheiben immer sehr dünn sind, kann der Temperaturunterschied zwischen Vorder- und Rückseite vernachlässigt werden, so daß $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ wird und damit

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \vartheta dz = h \vartheta.$$

Auf Gl. (39) angewandt, liefert dies

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \vartheta}{dr} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} \vartheta = -\frac{\alpha_1}{\lambda h} t_1 - \frac{\alpha_2}{\lambda h} t_2. \quad (40)$$

Voraussetzungsgemäß ist t_2 unveränderlich, während t_1 das Gesetz (36) befolgt. Legt man den Nullpunkt der Temperaturskala nach t_2 , so erhält man schließlich als Differentialgleichung für den Temperaturverlauf

$$\frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} \vartheta = -\frac{\alpha_1}{\lambda h} t_0 - \frac{\alpha_1}{\lambda h} k^* r^2 \quad (41)$$

mit

$$k^* = q_{ad} \frac{\omega^2}{9 \eta_{i-ad}} \cdot \frac{A}{C p}$$

Die vollständige Lösung dieser Besselschen Differentialgleichung lautet¹⁰

$$\vartheta = C_1 J_0(i m r) + C_2 i H_0^{(1)}(i m r) + a_0 + a_2 r^2 \quad (42)$$

wenn zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h}, \\ a_0 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} t_0 + \frac{4 \alpha_1 \lambda h}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k^*, \\ a_2 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} k^* \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

gesetzt wird und C_1 und C_2 die verfügbaren Integrationskonstanten sind. Diese werden aus den Randbedingungen ermittelt. Nimmt man an, daß die am Außenrand der Scheibe $r = a$ abgeführte Wärmemenge vernachlässigbar ist, so wird dort $\frac{d\vartheta}{dr} = 0$, wobei der Gradient als Ableitung von (42)

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -m C_1 i J_1(i m r) + m C_2 H_1^{(1)}(i m r) + 2 a_2 r \quad (44)$$

lautet. Am Radius $r = r_1$ kann die Scheibentemperatur oder deren Gradient vorgeschrieben sein. Damit ist man nach Kenntnis der Wärmeübertragungszahlen in der Lage, die Temperaturverteilung in der Scheibe zu ermitteln. Für die Wärmeübertragungszahl im Laufradkanal gelten die Formeln für Rohre, wenn als Durchmesser $d_k = \frac{4 F}{U_w}$ gesetzt wird. U_w ist der wärmeaustauschende Teil des Umfanges eines Laufradkanals. Darnach wird (Hütte, Bd. I, 26. Aufl., S. 498):

$$\alpha_1 = 0.040 Pe^{0.75} \lambda / d_k \quad (45)$$

Als Strömungsgeschwindigkeit ist in Pe' die Relativgeschwindigkeit der Luft im Laufradkanal zu setzen. Die Wärmeübergangszahl an der glatten Scheibenrückseite liegt bei Umfangsgeschwindigkeiten von 400 m/s um etwa 200 WE/m²h °C.^{11, 12}

Als Beispiel werde ein geschlossenes Laufrad nach Abb. 7 mit dem Halbmesser $a = 26$ cm gewählt. Es möge mit $n = 12500$ U/min. betrieben werden und die zweite Stufe eines zweistufigen Hochdruckgebläses von 14000 m adiabatischer Förderhöhe bilden. Es soll festgestellt werden, wie hoch die Eintrittstemperatur der Luft in das Laufrad der zweiten Stufe mit Rücksicht auf die Festigkeit gewählt werden darf.

Die Laufradscheibe kann vom Radius $r_1 = 10$ cm ab gut durch eine Scheibe von der Dicke $h = 0.6$ cm ersetzt werden. Die Relativgeschwindigkeit der Luft im Laufrad beträgt etwa 100 m/s. In einem Laufradkanal berechnet sich die Wärmeübergangszahl nach (45) zu $\alpha_1 = 250$ WE/m²h °C. Die starke Umlenkung der Strömung im Laufrad verbessert den Wärmeübergang, so daß man — wenn man auch noch die kurze Anlaufstrecke der Strömung berücksichtigt — auf eine Wärmeüber-

¹⁰ Jahnke-Emde: Funktionentafeln. Teubner. 1938.

¹¹ Th. v. Kármán: Über die laminare und turbulente Reibung. Z. angew. Math. Mechan. 1, 233 (1921).

¹² H. Latzko: Der Wärmeübergang an einem turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom. Z. angew. Math. Mechan. 1, 268 (1921).

gangszahl von rund $\alpha_1 = 420 \text{ WE/m}^2 \text{ h } ^\circ \text{C}$ kommt. α_2 wird hier ungefähr $150 \text{ WE/m}^2 \text{ h } ^\circ \text{C}$. An der Innenbegrenzung der Scheibe wird die Temperatur um etwa 15° über der Eintrittstemperatur der Luft in das Laufrad liegen. Dann ergibt die Rechnung bei verschiedenen Eintrittstemperaturen die in Abb. 9 eingetragenen Übertemperaturen der Scheibe gegenüber der umgebenden Luft. Das Laufrad ist aus einer vergüteten Al-Cu-Mg-Legierung, deren spezifisches Gewicht 0.0028 kg/cm^2 beträgt und deren

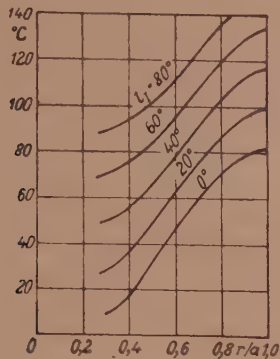


Abb. 9. Übertemperaturen gegenüber der Umgebung in einem Laufrad bei verschiedenen Lufteintrittstemperaturen.

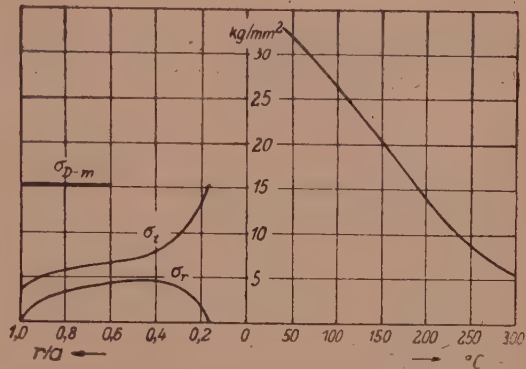


Abb. 10. Vergleich der Spannungen in einem Laufrad mit der Warmfestigkeit von Dural.

Warmdauerstandfestigkeit Abb. 10 auf der rechten Seite zeigt, gefertigt. Bei 12500 U/min treten die in der linken Hälfte von Abb. 10 wiedergegebenen Spannungen auf. Man erkennt, daß die Beanspruchung der Deckscheibe bei etwa 190° an der Streckgrenze liegt. Will man einen Sicherheitsabstand der Beanspruchung entsprechend 20% Überdrehzahl einhalten, so darf man nur etwa 140° zulassen. Die Temperatur der umgebenden Luft beträgt in dem Verdichter ungefähr 30° , so daß gemäß Abb. 9 die Eintrittstemperatur der Luft in das Laufrad 62° nicht überschreiten darf. In der ersten Verdichterstufe wird die Luft bereits auf rund 120°C erwärmt. Es muß also gefolgert werden, daß ein gesicherter Betrieb mit der gewünschten Drehzahl ohne Zwischenkühlung auf mindestens 62° nicht möglich ist.

Die Wärmespannungen, die durch die ungleichmäßige Erwärmung hervorgerufen werden, fallen dagegen nicht ins Gewicht. Ihre Berücksichtigung ist jedoch erforderlichenfalls ohne weiteres möglich, denn die Temperaturverteilung geht bekanntlich in die entsprechenden Festigkeitsgleichungen lediglich als eine besondere Form der Belastung ein.¹³

V. Einige allgemein benutzte Bezeichnungen.

- ω Winkelgeschwindigkeit der Laufraddrehung.
- ν Poissonsche Konstante.
- E Youngscher Elastizitätsmodul.
- γ spezifisches Gewicht.
- σ_r, σ_t in die betreffende Richtung fallende Komponente der Normalspannung.
- ϵ_r, ϵ_t spezifische Dehnung in der betreffenden Koordinatenrichtung.
- u Verzerrungskomponente in radialer Richtung.
- h Scheibendicke.
- h_R Schaufelhöhe.

¹³ G. Eichelberg: Temperaturverlauf und Wärmespannungen in Verbrennungsmotoren. Forsch. Ingenieurwes. H. 263.

b Schaufeldicke.

k Schaufelzahl.

$\mu = \frac{\gamma}{g}$ spezifische Masse.

ν Poissonsche Konstante.

q_{ad} adiabatische Ziffern.

n_{i-ad} innerer adiabatischer Wirkungsgrad.

(Eingegangen am 15. Juli 1946.)

Berichte.

Das Turbulenzproblem.

Von F. Kracmar, Wien.

(Zusammenfassender Bericht über Arbeiten aus den Jahren 1933 bis 1938.)

(Siehe Österreichisches Ingenieur-Archiv, Band I, Heft 1/2 und 3.)

II. Ausgebildete Turbulenz.

b) Statistische Theorien der Turbulenz.

Die statistische Theorie der Turbulenz hat das Bestreben, Aussagen über die Mittelwerte der Geschwindigkeiten und ihrer Ableitungen, als auch über die Quadrate und Produkte derselben zu gewinnen. Schon O. Reynolds¹ hat versucht, die bei der turbulenten Strömung auftretenden Spannungen durch die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten und ihrer Produkte auszudrücken. Die verschiedenen Theorien haben als gemeinsamen Inhalt die Festsetzung von Beziehungen zwischen gewissen Mittelwerten, so z. B. der durch den Mittelwert des Produktes der Geschwindigkeitsschwankungen definierten „Turbulenzspannung“ und dem mittleren Geschwindigkeitsgradienten.

In einer Reihe von Arbeiten beschäftigt sich J. M. Burgers² mit der Anwendung der statistischen Mechanik auf die Turbulenz. Er beschränkt sich in seinen Untersuchungen auf die zweidimensionale Bewegung in einem Kanal zwischen zwei festen Wänden. Weiter nimmt er an, daß die Flüssigkeitsmenge Q , welche in der Zeiteinheit und pro Höheneinheit durch einen Querschnitt des Kanals strömt, gegeben ist, und daß die mittlere Bewegung zeitlich unabhängig ist. Die mittlere Bewegung kann deshalb in jedem Punkt des Strömungsfeldes als Zeitmittel über ein bestimmtes, genügend großes Intervall $t_0 < t < t_0 + T$ definiert werden. Die beiden Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit können dargestellt werden durch

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v',$$

wobei \bar{u} , \bar{v} die Komponenten der Hauptbewegung und u' , v' die der Schwankungsbewegung sind. Wird die x -Achse entlang der Kanalachse gelegt, so ist \bar{v} und \bar{u} unabhängig von x .

Auf Grund der von Reynolds¹ und H. A. Lorentz³ abgeleiteten Gleichungen für die Hauptbewegung ergibt sich die bekannte Beziehung

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho \overline{u' v'} = J \cdot y, \quad (1)$$

in welcher $\overline{u' v'}$ den (von x unabhängigen) zeitlichen Mittelwert von J bedeutet und J das Druckgefälle darstellt.

Durch die Einführung der Reynoldsschen Zahl Re und der Stromfunktion ψ für die Schwankungsgeschwindigkeit und Beachtung der Randbedingungen erhält man Gl. (1) in der Form

$$Re^{-1} \frac{d\bar{u}}{dy} + \bar{t} = -J \cdot y, \quad (2)$$

worin

$$\bar{t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\overline{u' v'} \quad (3)$$

bedeutet.

Multipliziert man Gl. (2) mit y und integriert sie nach y von $-\frac{1}{2}$ bis $+\frac{1}{2}$, so erhält man nach einer kleinen Umformung unter Anwendung der Randbedingungen $\bar{u} \left(-\frac{1}{2}\right) = u \left(+\frac{1}{2}\right) = 0$ den Ausdruck

$$J = 12 (\text{Re}^{-1} - \int dy \cdot y \cdot \bar{t}). \quad (4)$$

Setzt man J aus Gl. (4) in Gl. (2) ein, so folgt

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = -12 y (1 - \text{Re} \int dy \cdot y \cdot \bar{t}) - \text{Re} \cdot \bar{t}. \quad (5)$$

Mit Hilfe von Gl. (4) und (5) läßt sich das Druckgefälle und die Verteilung der Geschwindigkeit der Hauptströmung berechnen, sobald die von den Schwankungsgeschwindigkeiten abhängige Größe \bar{t} bekannt ist.

Um die statistische Methode anwenden zu können, ist es erforderlich, eine Beschreibung des Feldes der Schwankungsgeschwindigkeiten zu erhalten, das nur eine endliche Zahl von Parametern enthält. Zu diesem Zwecke ersetzt Burgers das kontinuierliche Koordinatenfeld durch ein engmaschiges Punktgitter und nimmt an, daß das Feld der Schwankungsgeschwindigkeiten mit genügender Genauigkeit beschrieben werden kann durch die Werte der Stromfunktion ψ in den Gitterpunkten. Bedeutet N die Anzahl der Gitterpunkte, so ist jeder Strömungszustand durch N -Zahlen ψ_k charakterisiert. Die ψ_k werden als Koordinaten eines N -dimensionalen Phasenraumes gewählt. Durch Teilung dieses Phasenraumes in Zellen von genügend kleinem Volumen ω stellt das Zentrum jeder Zelle eine bestimmte Konfiguration des Feldes der Schwankungsgeschwindigkeiten dar. Durch Betrachtung von Konfigurationen, die durch Punkte innerhalb einer und derselben Zelle dargestellt werden, welche untereinander gleich sein sollen, und Abzählung der Zahl der Punkte in den verschiedenen Zellen erhält man ein System von Zahlen n_0, n_1, n_2, \dots . Diese Zahlen bestimmen, wie oft jede Konfiguration des Feldes der Schwankungsgeschwindigkeiten im Zeitraum $t_0 < t < t_0 + T$ auftritt. Für die Bestimmung der Mittelwerte — d. h. also für die Bestimmung der statistischen Eigenschaften des betrachteten mechanischen Systems — genügt die Kenntnis der Zahlen $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{p-1}$. Sie kennzeichnen einen bestimmten statistischen Zustand. Die Reihenfolge, in welcher die verschiedenen Konfigurationen des Feldes der Schwankungsgeschwindigkeiten in Wirklichkeit erscheinen, spielt dabei keine Rolle.

Als mögliche statistische Zustände werden diejenigen betrachtet, die der „Dissipationsbedingung“ genügen, bei denen also die Schwankungsbewegungen im Mittel in der Zeiteinheit gerade so viel Energie von der Hauptbewegung erhalten, als durch innere Reibung verbraucht wird.

Nach Einführung des „Gewichtes“ eines statistisch beschriebenen Zustandes untersucht Burgers die in eine Reihe von Normalfunktionen entwickelte Stromfunktion der Schwankungsbewegung und diskutiert dieselbe eingehend.

In einer weiteren Arbeit⁴ unterzieht Burgers die angewandten Methoden einer kritischen Betrachtung. Dabei weist er darauf hin, daß die Beschränkung auf ebene Strömungsbewegungen eine große Einschränkung bedeutet. Insbesondere lassen sich Wirbelbewegungen mit zur Hauptströmungsrichtung parallelen Wirbelachsen, eine Strömungsbewegung, die möglicherweise von großer Bedeutung ist, mit den benutzten Methoden nicht berücksichtigen. Die Nichtanwendbarkeit der Stromfunktion für räumliche Strömungsbewegungen läßt eine rechnerische Behandlung aussichtslos erscheinen. Ferner weist Burgers in dieser Arbeit auf die nicht ganz

befriedigende Berechnung der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} hin und vergleicht dieselbe mit der Prandtlschen und Kármánschen Rechnung. Weiter wird die angewendete statistische Methode selbst einer Kritik unterzogen und auf das in einer früheren Arbeit gefundene Ergebnis hingewiesen, daß die Rechnung für den Fall eines Systems mit unendlich viel Freiheitsgraden zu einer Divergenz der Dissipation führt. Ein formales Analogon der klassischen statistischen Mechanik besteht in der Tatsache, daß im Falle eines konservativen Systems mit einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden der Energieinhalt dieses Systems unbegrenzt ist. Der für diesen Fall gefundene Ausweg durch die Quantenstatistik scheint aber unter Berücksichtigung des Reynoldsehen Ähnlichkeitsgesetzes für die Hydrodynamik nicht möglich. Abschließend weist Burgers darauf hin, daß möglicherweise ein tieferes Eindringen in das Wesen der Dissipation neue Wege erschließen könnte.

Einen zusammenfassenden Bericht über die Arbeiten J. M. Burgers gibt C. F. P. Trubridge.⁵

W. Tollmien⁶ zeigt in einer Untersuchung, daß die Turbulenzstatistik im Burgersschen Phasenraum für gewisse Fälle zu paradoxen Ergebnissen führt. So ergibt sich für die zweidimensionale Strömung zwischen zwei parallelen ebenen Wänden mit Hilfe der Dissipationsbedingung für die turbulente Reibungsspannung $\tau = \rho \overline{u' v'} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ein verschiedener Wert, je nachdem, ob man die Ableitungen $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ als „vordere“ oder „zentrale“ Differentialquotienten bildet. Dieses Ergebnis ist scheinbar auf das künstlich eingeführte diskontinuierliche Punktgitter zurückzuführen, das mit dem an sich kontinuierlichen Problem nicht vereinbar ist.

In einer weiteren Arbeit⁷ behandelt W. Tollmien hauptsächlich die Frage, ob die Dissipationsbedingung als einschränkende Bedingung für die Verteilungswahrscheinlichkeit gewählt werden soll. Nachdem nach neueren experimentellen Untersuchungen für die ausgebildete turbulente Strömung die Reibung keine ausschlaggebende Rolle zu spielen scheint, wird für das Innere der Strömung die Reibung konsequent vernachlässigt. Zuzufolge dieser Tatsache scheidet die Dissipationsbedingung als einschränkende Nebenbedingung aus. Aus der Untersuchung anderer Nebenbedingungen auf ihre Brauchbarkeit für die ebene Kanalströmung entwickelt der Verfasser ganz allgemeine Rechenvorschriften für Nebenbedingungen, die linear und quadratisch in den Phasenkoordinaten sind. Eine besonders einfache, aber nicht ausreichende quadratische Nebenbedingung ist die Konstanz der mittleren kinetischen Gesamtenergie der Strömung

$$\sum_1^N \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] = \text{const.} \quad (6)$$

Aus ihr folgt eine Geschwindigkeitsverteilung, die stückweise konstant über den Querschnitt ist. Auch die Vorschrift der Schubspannung $\tau = \rho \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}$ in jedem Punkt der Strömung schränkt selbst dann den möglichen Bereich der Funktionswerte noch nicht genügend ein, wenn man die Energiebedingung noch hinzunimmt. Auch in diesem Falle ergibt sich eine stückweise konstante Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt.

Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten vermutet W. Tollmien darin, daß die Turbulenz ein wesentlich dreidimensionaler Vorgang ist, auch wenn die mittlere Bewegung zweidimensional ist.

F. Noether⁸ untersucht im Hinblick auf eine statistische Turbulenztheorie die Stabilität einer ebenen Kanalströmung, die aus einzelnen Wirbelfäden aufgebaut ist. Er geht dabei von der Annahme aus, daß die Wirbeln in wandparallelen Reihen angeordnet sind, die sich in der Längsrichtung mit verschiedenen Geschwindigkeiten

bewegen, wobei die Wirbelstärke und der Wirbelabstand der einzelnen Reihen verschieden sind. In diesem Strömungsmodell tritt an die Stelle des Mischungsweges ein mittlerer Abstand der Wirbelfäden. Die Kármánsche Ähnlichkeitshypothese läßt sich dann als statistisches Gleichgewicht in der Verteilung der Wirbel deuten.

Eine dynamische Stabilität im Sinne der Kármánschen Wirbelstraße läßt sich bei diesem Strömungsmodell nicht angeben, sondern nur eine statistische in dem Sinne, daß die einzelnen Wirbel ihre Lage austauschen, aber das Gesamtbild erhalten bleibt. Die Stabilitätsfrage wird dahingehend modifiziert, daß die Bedingungen untersucht werden, unter welchen die dynamische Labilität möglichst klein ist. Aus der Diskussion der Störungsgleichung ergibt sich das Minimum der Labilität für $b/a = 0.57$, wobei a der Längs- und b der Querabstand der Wirbel ist. Außerdem ergibt sich, daß die Labilität herabgesetzt wird, wenn die Reihenzahl eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Man kann also daraus verstehen, daß aus Stabilitätsgründen sich eine endliche, nicht verschwindende Länge als Mischungsweg einstellt.

Unter Zugrundelegung einer Verteilung der turbulenten Schwankungen, die von einer Gaußschen Verteilung nur wenig abweicht, errechnen G. Dedebant, Ph. Schereschewsky und Ph. Wehrle^{9, 10} die Prandtl- und v. Kármánschen Ausdrücke für die turbulente Schubspannung. Gegenüber der v. Kármánschen Originalableitung besteht der Unterschied darin, daß für die Schwankungsfelder Ähnlichkeit nur im Mittel vorausgesetzt wird.

H. Gebelein¹¹ entwickelt eine statistische Theorie der Turbulenz aus der Annahme, daß als Element der Statistik der Wirbel anzusehen ist, wobei keinerlei Voraussetzung getroffen werden braucht, ob derselbe als idealisierter Wirbelfaden oder als diffus verteilte Rotation vorliegt. Für seine Entwicklungen nimmt er an, daß an jeder Stelle der Flüssigkeit dort etwa vorhandene Wirbel mit der Geschwindigkeit der Strömung mitgenommen werden und daß diese Strömungsgeschwindigkeit selbst eine Funktion der im betreffenden Augenblick in der Flüssigkeit vorliegenden Verteilung der Rotation ist. Aus Betrachtungen über das Kollektiv der Momentangeschwindigkeiten findet er, daß die Streuung dieses Kollektivs in einem Aufpunkt proportional der Quadratwurzel aus dem Absolutwert der mittleren turbulenten Rotation in diesem Punkt ist. Daraus wird weiter gefolgert, daß für die mittlere Streuungsgeschwindigkeit c an einer beliebigen Stelle der turbulenten Strömung die Beziehung gilt

$$c = \text{const.} \sqrt[4]{|\text{rot } v|}. \quad (7)$$

Die Streuungen des vollständigen Kollektivs der infinitesimalen Zusatzgeschwindigkeiten ergeben einen Streuungstensor, der als „Turbulenztensor“ bezeichnet wird und für den sich der Ausdruck

$$\Pi = \frac{1}{2} C^2 |\text{rot } v| x_2^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\kappa + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

ergibt, wobei C und κ Konstante sind und x_2 die Koordinate des Aufpunktes $P(x_1, x_2, x_3)$ bedeutet. Für das Kreisrohr nimmt dieser Turbulenztensor die Gestalt

$$\Pi(P) = \frac{C^2}{2} R^2 (1 - \eta)^2 |\text{rot } v| \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\kappa + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

an, worin $R(1 - \eta) = R - y$ den Wandabstand des Aufpunktes P bedeutet. In der Rohrachse ergibt sich der Turbulenztensor als

$$\Pi(0) = \frac{2}{\pi} C^2 R^2 |\operatorname{rot} v| \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3+\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3+\kappa} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Aus Messungen von Nikuradse für die Rohrströmung folgert Gebelein, daß $\kappa = 0$ und $C = 0.38$ ist. Mit $\kappa = 0$ erhält man für den Turbulenztensor der Rohrströmung in Wandnähe den Ausdruck

$$\Pi(\eta) = C^2 R^2 (1 - \eta)^2 |\operatorname{rot} v| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

und auf der Rohrachse

$$\Pi(0) = \frac{2}{3\pi} C^2 R^2 |\operatorname{rot} v| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Bei der Anwendung seiner statistischen Turbulenztheorie auf die Probleme der Wandturbulenz, der turbulenten Strömung in konvergenten und divergenten Kanälen und der freien Turbulenz findet Gebelein Übereinstimmung zwischen seinen Rechnungen und den experimentellen Ergebnissen. Diese Tatsache ist ohne weiteres verständlich, da vor allem die in der Theorie freien Konstanten aus den experimentellen Ergebnissen gefolgert werden.

Die bedeutendsten Arbeiten zur statistischen Theorie der Turbulenz gehen von dem Begriff der „Korrelation“ aus. Schon A. Friedmann¹² hat die Korrelation als unbekannte Variable in die hydrodynamischen Gleichungen eingeführt. Doch konnte er seine Vorstellungen nicht zu Ergebnissen bringen, die mit dem Experiment verglichen werden konnten. Erst G. J. Taylor¹³ hat in seinen Arbeiten zur statistischen Theorie der Turbulenz mit Hilfe von Korrelationsrechnungen im Falle der „isotropen Turbulenz“ Ergebnisse über das Abklingen der Turbulenz in einem Windstrom erzielt, die einen Vergleich mit den experimentellen Untersuchungen ermöglichen.

Bezeichnet man die Geschwindigkeitskomponenten der Hauptströmung mit U_i und die darüber gelagerten turbulenten Schwankungen mit \bar{u}_i , so ist die momentane Geschwindigkeit in der i -Richtung $U_i + u_i$. Da U_i die mittlere Bewegung darstellen soll, muß im Mittel $u_i = 0$ sein, ganz unabhängig davon, wie stark die Schwankungen sind. Ein Maß für die Stärke der Turbulenz erhält man durch das quadratische Mittel

$$u_i' = \sqrt{\overline{u_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_i^2 dt}. \quad (13)$$

Für die „isotrope Turbulenz“, wie sie praktisch auftritt in einer Strömung hinter einem Gitter oder im Luftstrom eines Windkanals in einiger Entfernung vom Turbulenz-erzeuger, wird angenommen, daß die Mittelwerte von Quadraten und Produkten der Geschwindigkeitskomponenten und ihren Ableitungen unabhängig vom Ort des Beobachtungspunktes und invariant gegen Koordinatentransformationen sind. Zwischen den Mittelwerten

$$a_1 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2, \quad a_2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2, \quad a_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad a_4 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k},$$

wobei $i, k = 1, 2, 3$, $i \neq k$ ist, gelten folgende Beziehungen:¹⁴

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_4 &= 0, \\ a_1 &= 2a_3 = 0, \\ a_1 - a_2 - a_3 - a_4 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a_1 = \frac{a_2}{2} = -2 a_3 = -2 a_4.$$

Die wichtigste Beziehung ist

$$\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right)^2 \quad \text{mit} \quad i \neq k. \quad (14)$$

Durch Einführung dieser Mittelwerte in den Ausdruck für die Dissipationsarbeit einer ganz beliebigen Bewegung

$$W = \mu \left\{ \sum_k \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 - \frac{1}{\varrho} \Delta p \right\}, \quad (15)$$

der sich durch Bildung der Divergenz der Stokes-Navierschen Bewegungsgleichung unter der Voraussetzung, daß die äußeren Kräfte ein Potential besitzen, ergibt und man die Koordinaten x, y, z bzw. die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w mit x_1, x_2, x_3 bzw. u_1, u_2, u_3 bezeichnet, erhält G. J. Taylor für den Mittelwert der Dissipationsarbeit

$$\overline{W} = 7.5 \mu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right)^2. \quad (16)$$

Dieser Ausdruck folgt aus Gl. (15), wenn man beachtet, daß die Summe $\sum_k \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2$ aus den drei Gliedern der Form $\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} \right)^2$, für die nach Gl. (14) $\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right)^2$ gilt, und aus sechs untereinander gleichen Gliedern $\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right)^2$ mit $k \neq i$ besteht, wobei außerdem für die isotrope Turbulenz $\overline{\Delta p} = 0$ ist.¹⁵

Da bei einer turbulenten Strömung jedes hin- und herschwankende Flüssigkeitsteilchen zufolge der Kontinuität durch Trägheits- und Zähigkeitswirkungen dauernd seine ganze Umgebung beeinflusst, so wendet G. J. Taylor, um für die theoretische und experimentelle Untersuchung ein Maß für die Reichweite dieser Beeinflussung zu erhalten, den statistischen Begriff der Korrelation auf das Turbulenzproblem an. Der Korrelationskoeffizient gibt an, ob und in welchem Maß die gleichzeitigen Schwankungen u und u' an zwei verschiedenen Punkten P und P' voneinander abhängen. Nachdem für isotrope Turbulenz die Mittelwerte der Quadrate der Schwankungsgeschwindigkeiten gleich sind, kann der Korrelationsfaktor definiert werden als

$$R_{ik} = \frac{\overline{u_i u_k'}}{\overline{u^2}}. \quad (17)$$

Betrachtet man zwei Punkte P_1 und P_2 , deren Verbindungslinie senkrecht zur x -Richtung liegt und deren Abstand y ist, so kann man die gleichzeitigen Schwankungen u und $u(y)$ durch den Korrelationskoeffizienten

$$R_2 = \frac{\overline{u \cdot u(y)}}{\overline{u^2}} \quad (18)$$

definieren. R_2 als Funktion des Abstandes y hat einen solchen Verlauf, daß sich für $y = 0$ der maximale Wert $R_2 = 1$ und für größere Werte von $\pm y$ ein monotoner Abfall über einen kleinen negativen Wert auf Null ergibt. Von einem gewissen Abstand an besteht zwischen den Geschwindigkeiten kein praktischer Zusammenhang mehr, d. h. es ist ein negativer oder positiver Schwankungswert $u \cdot u(y)$ gleich wahrscheinlich, so daß im Mittel $\overline{u \cdot u(y)} = 0$. Die ältere Mischungswegtheorie der Turbulenz könnte man so interpretieren, daß dieser Korrelationsverlauf durch ein Rechteck dargestellt wird, dessen Breite der Größe der einzelnen Flüssigkeitsballen bzw. dem Mischungsweg selbst entspräche. Je größer die Turbulenz ist, desto weiter reicht

die Beeinflussung und desto breiter verläuft die Korrelationskurve, so daß man ein exakt definierbares Maß für den Mischungsweg durch die Größe der Turbulenz erhält

$$l_2 = \int_0^\infty R_2(y) dy$$

bzw.

$$l_2 = \int_0^Y R_2(y) dy,$$

wobei Y so groß zu wählen ist, daß $R_2(y) = 0$ ist.

Je nach der Lage der Verbindungslinie der zwei Punkte und der Richtung der untersuchten Geschwindigkeiten können beliebig viele Korrelationskoeffizienten definiert werden. Bei isotroper Turbulenz gibt es aber nur zwei Korrelationsfunktionen, die nicht verschwinden und auch nicht aus Symmetriegründen durch Koordinatentransformation aufeinander zurückgeführt werden können. Neben dem schon definierten Korrelationsfaktor R_2 ist der andere gegeben durch¹⁶

$$R_1 = \frac{\overline{u \cdot u(x)}}{\bar{u}^2}. \quad (19)$$

Für diese Korrelationsfunktion R_1 fällt die Richtung der untersuchten Schwankungen mit der Verbindungsgeraden zusammen. Mit dieser Korrelation kann ebenfalls die Größe der Turbulenz definiert werden als

$$l_1 = \int_0^\infty R_1(x) dx \quad (20)$$

bzw.

$$l_1 = \int_0^X R_1(x) dx, \quad (20a)$$

wobei X jene Entfernung ist, bei der sich $R_1(x) = 0$ ergibt.

Der Zusammenhang zwischen $R_2(y)$ und dem für die Dissipation wichtigen Mittelwert $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ findet G. J. Taylor auf folgende Weise: Wird $R_2(y)$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt, so folgt

$$R_2(y) = \frac{\overline{u \cdot u(y)}}{\bar{u}^2} = \frac{1}{\bar{u}^2} \left[\bar{u}^2 + y \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{y^2}{2!} \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \dots \right]. \quad (21)$$

Aus $u^2 = \text{const.}$ ergibt sich

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial y} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

bzw. durch nochmalige Differentiation

$$\bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (23)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (22) und (23) ergibt sich $R_2(y)$ für kleine Werte von y als

$$R_2(y) = 1 + \frac{y^2}{2! \bar{u}^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (21a)$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = 2! \bar{u}^2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - R_2(y)}{y^2} = 2 \bar{u}^2 \cdot \frac{1}{\lambda^2}. \quad (24)$$

Dabei kann die eingeführte Länge λ geometrisch gedeutet werden als der Abstand vom Nullpunkt, in dem die Schmiegungsparabel bei $y = 0$ die Abszisse $R_2 = 0$ schneidet.

Setzt man den Wert für $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$ aus Gl. (24) in Gl. (16) ein, so erhält man den Mittelwert der Dissipation als

$$\overline{W} = 15 \mu \frac{u^2}{\lambda^2}. \quad (25)$$

Aus Gl. (25) folgt, daß die Dissipation desto größer ist, je kleiner λ wird. G. J. Taylor betrachtet λ als den Durchmesser der kleinsten Wirbel, die durch die Zähigkeit verschluckt werden. Je kleiner diese Wirbel sind, desto spitzer ist der Verlauf von $R_2(y)$ bei $y = 0$, und desto schneller wird eine solche Turbulenz abklingen.

Zur Bestätigung seiner Theorie bestimmt G. J. Taylor den Wert für λ aus Messungen von Simmons und Salter¹⁷ und H. L. Dryden¹⁸ und fand den theoretischen Zusammenhang zwischen W und R_2 bestätigt. Die von L. Prandtl und H. Reichardt¹⁹ durchgeführten R_2 -Messungen in einem Kanal eignen sich besonders gut zur Bestimmung von λ und G. J. Taylor zeigt, daß für diese Strömung innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Rechnung Gleichheit der insgesamt aus der mittleren Bewegung entnommenen Energie mit der insgesamt dissipierten besteht.

Durch Auswertung der Experimente von C. B. Schubauer²⁰ ermittelt G. J. Taylor die Korrelation R_1 und erhält aus diesen Korrelationskurven Aufschluß über die turbulente Druckschwankung quer zur Hauptströmung.

In einer weiteren Arbeit untersucht G. J. Taylor²¹ die Abhängigkeit der Lage des Umschlagpunktes, d. i. jene Stelle, wo die Reibungsschicht an einem angeströmten Körper beginnt turbulent zu werden, von der Turbulenz. Die Grundannahme, die er dabei macht, ist die, daß es die turbulenten Schwankungen des Druckgradienten sind, durch welche die Lage des Umschlagpunktes durch die Turbulenz beeinflusst wird. Bei der Rechnung wird vorausgesetzt, daß sich der betrachtete Körper in einem isotrop-turbulenten Luftstrom befindet. Für den quadratischen Mittelwert der Schwankungen des Druckgradienten $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ ergibt sich

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \sim \frac{\rho u^2}{l_1} \sqrt{\frac{\bar{u} L_1}{\nu}}. \quad (26)$$

Aus $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$, dem Staudruck $q = \frac{\rho}{2} U^2$ (U mittlere Geschwindigkeit) und der Koordinate X (bei der Kugel die Bogenlänge vom vorderen Staupunkt bis zum Umschlagpunkt) wird die folgende dimensionslose Größe gebildet

$$A = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \frac{X}{p} \sim \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \frac{X}{\rho U^2}. \quad (27)$$

Für $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ der Ausdruck aus Gl. (26) eingesetzt, folgt

$$A = \left(\frac{\bar{u}}{U}\right)^2 \frac{X}{l_1} \sqrt{\frac{u l_1}{\nu}} = \sqrt{\frac{U X}{\nu}} \sqrt{\frac{X}{l_1}} \left(\frac{\bar{u}}{U}\right)^{5/2}. \quad (27a)$$

Die Reynoldssche Zahl $Re(X)$ des Umschlagpunktes ist nun eine Funktion dieser dimensionslosen Größe und es ergibt sich die Beziehung

$$Re(X) = f\left[\left(\frac{\bar{u}}{U}\right) \left(\frac{X}{l_1}\right)^{1/5}\right], \quad (28)$$

wobei M die Maschenweite des turbulenzerzeugenden Gitters ist. Für größere Reynoldssche Zahlen $\frac{M \bar{u}}{\nu} = 60$ kann $l_1 \sim M$ gesetzt werden, so daß die Gl. (28) auch geschrieben werden kann in der Form

$$Re(X) = F\left[\left(\frac{\bar{u}}{U}\right) \left(\frac{X}{M}\right)^{1/5}\right]. \quad (28a)$$

Diese Beziehung wurde an ebenen Platten²² und an einem elliptischen Zylinder²³ gut bestätigt.

Eine besondere Bedeutung haben diese Ergebnisse von G. J. Taylor für die

kritische Reynoldssche Zahl von Kugeln, da diese als ein Maß für die Turbulenz eines Windkanals betrachtet wird. Re_{krit} ist definiert als diejenige Zahl, bei der die Kugel den Widerstandsbeiwert $c_w = 0.3$ hat. Diesem c_w -Wert entspricht bei verschiedenen Kugeln und Turbulenzgraden ein bestimmter geometrisch ähnlicher Strömungszustand. Aus Gl. (28a) folgt für die kritische Reynoldssche Zahl Re_{krit} von Kugeln die Beziehung

$$Re_{krit}(D) = G \left[\left(\frac{\bar{u}}{U} \right) \left(\frac{D}{M} \right)^{1/5} \right] \quad (29)$$

wobei D der Kugeldurchmesser ist. Diese Beziehung wurde durch experimentelle Untersuchungen²⁴ bestätigt.

Neben der Beschreibung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes durch die Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen kann auch der Begriff des „Spektrums der Turbulenz“ verwendet werden, wie G. J. Taylor²⁵ gezeigt hat. In diesem Falle werden die Geschwindigkeitsschwankungen in einem Punkt harmonisch in sinusförmige Schwankungen zerlegt gedacht, jede von einer anderen Frequenz n , so daß $u^2 F(n) dn$ der Beitrag der Schwankungen mit den Frequenzen zwischen n und $n + dn$ ist. Da

$$\bar{u}^2 = \int_0^\infty \bar{u}^2 F(n) dn \quad \text{folgt} \quad \int_0^\infty F(n) dn = 1.$$

Die Korrelation $R_1(x) = \frac{u \cdot u(x)}{\bar{u}^2}$ kann auch geschrieben werden als Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen an einem Punkt zu verschiedenen Zeiten in der

Form $R_1(x) = \frac{u(t) \cdot u\left(t + \frac{x}{U}\right)}{\bar{u}^2}$, wenn $U \gg u$ ist, da $t = \frac{x}{U + u} = \frac{x}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right)$. G. J. Taylor zeigte, daß $R_1(x)$ und $\frac{UF(n)}{2\sqrt{2}\pi}$ Fourier-Transformierte aufeinander sind. Es gelten demnach folgende Gleichungen

$$F(n) = \frac{4}{U} \int_0^\infty R_1(x) \cos \frac{2\pi n x}{U} dx \quad (30a)$$

und

$$R_1(x) = \int_0^\infty F(n) \cos \frac{2\pi n x}{U} dn. \quad (30b)$$

Die Länge λ kann durch $F(n)$ ausgedrückt werden in der Form

$$\frac{1}{\lambda^2} = 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{n^2}{U^2} U F(n) \frac{dn}{U}. \quad (31)$$

Aus experimentellen Untersuchungen von L. F. G. Simmons und C. Salter²⁶ erweist sich das Spektrum unabhängig von der mittleren Geschwindigkeit U der Hauptströmung. Das steht in Übereinstimmung damit, daß auch die Korrelation $R_1(x)$ hinter Gittern nahezu unabhängig von U ist. Lediglich der Verlauf von $R_1(x)$ bei sehr kleinen Abständen und damit auch die Länge λ hängen von U ab. Nach Gl. (31) müßte dann aber auch das Spektrum von U abhängen. Genaue Messungen zeigen nun, daß das Spektrum in einem großen Frequenzbereich von U unabhängig ist, daß sich aber bei sehr hohen Frequenzen je nach der mittleren Geschwindigkeit ein anderer Verlauf ergibt. Die hohen Frequenzen sind aber gerade für den Zusammenhang des Spektrums mit λ nach Gl. (31) wesentlich.

In sehr allgemeiner Weise führt Th. v. Kármán^{16, 27} den Begriff der Korrelation in die statistische Theorie der Turbulenz ein. Er betrachtet den durch Gl. (17) definierten Korrelationsfaktor als die Komponente von einem „Tensor“, dem sog. „Korrelationstensor“. Für isotrope Turbulenz ist dieser Tensor symmetrisch, so daß $R_{ik} = R_{ki}$ ist. Das Feld dieses Korrelationstensors kann als ein Spannungsfeld

gedacht werden. R_{ik} ist dann die Spannung in einer Fläche senkrecht zu der Achse x_i . Zufolge der Symmetrie des Tensors können alle Spannungskomponenten dargestellt werden durch zwei Hauptspannungen R_1 und R_2 . Sowohl R_1 und R_2 sind skalare Funktionen der Entfernung r der beiden Punkte P und P' . Bezeichnet man die Komponenten von r mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 , so kann der Korrelationstensor dargestellt werden in der Form

$$R = \frac{R_1 - R_2}{r^2} \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2 \xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_3 \xi_1 & \xi_3 \xi_2 & \xi_3^2 \end{pmatrix} + R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

R_1 und R_2 sind die in Gl. (18) und (19) definierten Korrelationsfaktoren.

Der von v. Kármán abgeleitete Zusammenhang zwischen R_1 und R_2 kann nach Prandtl¹⁴ folgendermaßen abgeleitet werden: Betrachtet man die ein- und ausfließende Flüssigkeitsmenge durch eine Kontrollfläche, die sich mit der gleichförmigen Hauptströmung fortbewegt und aus einer Halbkugel mit dem Radius r_1 und ihrer Durchmessersebene zusammengesetzt ist, so tritt infolge der turbulenten Schwankungen durch die Durchmessersebene in der Zeiteinheit die Menge

$$\varrho \int_0^{r_1} u R_2(r) 2\pi r dr$$

hindurch. $R_2(r)$ kann an Stelle $R_2(y)$ geschrieben werden, da wegen der Isotropie der Turbulenz die Lage des Koordinatensystems beliebig sein kann. Aus der Halbkugel strömt heraus die Menge

$$\varrho \int u \cos \alpha R_1(r) 2\pi r_1 \sin \alpha \cdot r_1 d\alpha = \pi \bar{u} R_1(r) r^2.$$

Zufolge der Kontinuität müssen die beiden Mengen gleich sein, so daß folgt

$$\int_0^{r_1} \bar{u} R_2(r) 2\pi r dr = \pi \bar{u} R_1(r) r^2.$$

Diese Gleichung, nach r_1 differenziert, ergibt

$$r_1 R_2(r_1) = r_1 R_1(r_1) + \frac{r_1^2}{2} \frac{dR_1(r)}{dr} \Big|_{r=r_1}$$

oder, da der Radius der Halbkugel r_1 beliebig ist,

$$R_2(r) = R_1(r) + \frac{1}{2} r \frac{dR_1}{dr}$$

bzw.

$$r \frac{dR_1}{dr} + 2(R_1 - R_2) = 0. \quad (33)$$

Durch Verwendung des Korrelationstensors zeigt v. Kármán, daß der Mittelwert

$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}$ dargestellt werden kann als

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = -\bar{u}^2 \left(\frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \right)_{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0}$$

Zufolge Gl. (32) und (33) können alle Mittelwerte von Produkten zurückgeführt werden auf die Form

$$\text{const.} \cdot \bar{u}^2 \cdot \left(\frac{d^2 R_1}{dr^2} \right)_{r=0}$$

Nachdem $\left(\frac{d^2 R_1}{dr^2} \right)_{r=0}$ gleich ist dem Reziprokwert des Quadrates einer Länge λ , die identisch mit der von G. J. Taylor eingeführten Größe ist, so können alle Quadrate und Produkte der Geschwindigkeitsableitungen ausgedrückt werden in der Form

$$\text{const.} \cdot \frac{\bar{u}^2}{\lambda^2}.$$

Aus der Stokes-Navierschen Bewegungsgleichung leitet v. Kármán unter der Annahme, daß die R_{ik} langsam veränderliche Funktionen der Zeit sind, die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_{ik} \bar{u}^2) = 2 \nu \bar{u}^2 \Delta R_{ik} \quad (34)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_1 \bar{u}^2) = 2 \nu \bar{u}^2 \left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} \right) \quad (34a)$$

ab. Unter der Annahme, daß für $r = 0$, $R_1 = 1$ und $\frac{dR_1}{dr} = 0$ ist, folgt aus Gl. (34a)

$$\frac{d\bar{u}^2}{dt} = -10 \nu \frac{\bar{u}^2}{\lambda} \quad (35)$$

Aus Gl. (34) und (35) erhält v. Kármán für die Änderung der Korrelation R_1 mit der Zeit die Gleichung

$$\frac{\partial R_1}{\partial t} = 2 \nu \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial R_1}{\partial r} + \frac{5}{\lambda^2} R_1 \right] \quad (36)$$

Diese Gleichung bestimmt R_1 für jeden Zeitpunkt, wenn R_1 für $t = 0$ gegeben ist. Unter Annahme ähnlich bleibender Abhängigkeit des Korrelationskoeffizienten vom Abstand wird die Beziehung

$$\lambda^2 = \frac{1}{\alpha} \nu t \quad (37)$$

abgeleitet.

Für das Abklingen der Turbulenz folgt aus Gl. (35) und (37)

$$\bar{u}^2 = \frac{\text{const.}}{t^{10\alpha}} \quad (38)$$

Diese Gleichung, angewandt auf das Abklingen der Turbulenz in einem Luftstrom hinter einem Gitter, ergibt

$$\bar{u}^2 = \frac{\bar{u}_0^2}{\left(1 + \frac{x}{U t_0}\right)^{10\alpha}}, \quad (39)$$

wobei U die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und $u^2 = u_0^2$ für $t = 0$ ist. G. J. Taylor erhält als Ergebnis seiner Theorie für diesen Fall

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{u}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{u}_0^2}} + \text{const.} \frac{x}{U} \quad (40)$$

Diese Gleichung stimmt mit Gl. (39) überein, wenn $\alpha = \frac{1}{5}$ gesetzt wird.

Analog der durch Gl. (35) dargestellten Energiedissipation stellt v. Kármán für die Wirbeldissipation die Gleichung

$$\frac{d\bar{\omega}^2}{dt} = -10 \nu \frac{\bar{\omega}^2}{\lambda_\omega}, \quad (41)$$

wobei $\lambda_\omega = \frac{15}{7 \lambda^2 (d^4 R / dr^4)_{r=0}}$ ist, auf.

Für die turbulente Strömung mit Schubspannung in einem Kanal mit parallelen Wänden erhält v. Kármán die Energietransportgleichung

$$-\frac{d}{dx_2} \left[\varrho u_2' \left(\frac{q^2}{2} + \frac{p}{\varrho} \right) \right] + \tau \frac{dU}{dx_2} = \mu \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \quad (42)$$

In dieser Gleichung ist $\varrho \left(\frac{q^2}{2} + \frac{p}{\varrho} \right)$ die Energie der Geschwindigkeitsschwankungen, bezogen auf die Volumeinheit, $\varrho u_2' \left(\frac{q^2}{2} + \frac{p}{\varrho} \right)$ ist die Energieströmung durch Konvektion, bezogen auf die Flächeneinheit der $x_1 x_3$ -Ebene, $\tau \frac{dU}{dx_2}$ die Schubspannungsarbeit und $\mu \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2$ die Energiedissipation durch Zähigkeit.

Analog ergibt sich für den Wirbeltransport die Gleichung

$$-\frac{d}{dx_2} \left(u_2' \frac{\overline{\omega'^2}}{2} \right) = \nu \sum_i \sum_k \left(\frac{\overline{\partial \omega_i}}{\partial x_k} \right)^2. \quad (43)$$

Im Falle der „homologen Turbulenz“ sind die Korrelationskoeffizienten unabhängig von der Lage der betrachteten Punkte und die quadratischen Mittelwerte der Geschwindigkeitsschwankungen räumlich konstant. Die turbulente Couette-Strömung kann angenähert als homolog angesehen werden. In diesem Fall reduziert sich Gl. (42) zu

$$\tau \frac{dU}{dy} = \nu \sum_i \sum_k \left(\frac{\overline{\partial u_i}}{\partial x_k} \right)^2. \quad (44)$$

Für den Wirbeltransport wird die Gleichung

$$\frac{d}{dx_2} \left[l u_2' \frac{d}{dx_2} \frac{\overline{\omega'^2}}{2} \right] = \nu \sum_i \sum_k \left(\frac{\overline{\partial \omega_i'}}{\partial x_k} \right)^2 \quad (45)$$

abgeleitet. Aus dieser Gleichung ergibt sich die Verteilung der mittleren Geschwindigkeit als

$$U = U_c + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau}{\varrho}} \log \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{x^2}{a} \right) \right], \quad (46)$$

wobei a die Entfernung von der Mitte des Kanals bis zur Wand ist.

Abschließend führt v. Kármán Betrachtungen über mögliche Ansätze für den Fall der nichthomologen Turbulenz (ruhende Kanalwände) durch.

G. J. Taylor²⁸ bestätigt auf Grund von Messungen L. F. G. Simmons die Richtigkeit der von v. Kármán aufgestellten Gl. (33). Dagegen weist er nach, daß Gl. (34) für die zeitliche und räumliche Änderung des Korrelationskoeffizienten R_1 nur dann gilt, wenn

$$u' \frac{\partial p}{\partial u} + u \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

ist und die Mittelwerte der Trägheitsglieder in der Stokes-Navierschen Bewegungsgleichung Null werden. Weiter glaubt der Verfasser auf die Ungültigkeit der Annahme Th. v. Kármáns schließen zu können, nach welcher die Abhängigkeit der betreffenden Korrelation vom Abstand der beiden Beobachtungsorte im Laufe der Zeit ähnlich bleiben sollte. Eingehend erläutert G. J. Taylor, daß seine Anschauungen von denen Th. v. Kármáns in vielen Punkten abweichen, trotzdem die Gl. (39) für das Abklingen der Turbulenz die Gl. (40) von Taylor als Spezialfall enthält.

L. H. Dryden²⁹ untersucht die spektrale Verteilung der Geschwindigkeitsschwankungen für den Fall der isotropen Turbulenz. Ist die Schwankung der u -Komponente an einem bestimmten Ort gegeben durch

$$u = \sqrt{2} \sum u_n \cos(2\pi n f t - \alpha_n),$$

so ist $\overline{u^2} = \sum \overline{u_n^2}$ oder im Grenzfall mit anderer Normierung $\overline{u^2} = \int_0^\infty \overline{u_f^2} df$. Weil bei gegebener Translationsgeschwindigkeit des ganzen Feldes jeder einzelnen Frequenz eine bestimmte Wellenlänge λ zugeordnet werden kann, so kann auch geschrieben werden

$$\overline{u^2} = \int_0^\infty \overline{u_\lambda^2} d\lambda.$$

Aus der Betrachtung der Energie der Schwankungen, bezogen auf die Volumseinheit, ergibt sich

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \varrho \overline{u_\lambda^2}.$$

Die Kenntnis dieser Funktion E_λ ist für die Turbulenz von großer Bedeutung. Es wird nun weiter gezeigt, daß durch die Annahme der affinen Änderung der Energieverteilung durch die Dämpfung im Laufe der Zeit man schreiben kann

$$E_\lambda(\lambda, t) = \frac{1}{A} E\left(\frac{\lambda}{a}, 0\right),$$

worin A und a Funktionen von t allein sind und E_λ als Funktion von λ sich aus dem Dissipationsgesetz bestimmen läßt.

Es werden zwei Fälle betrachtet: a) viskose Dissipation nach dem Gesetz

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial t} = -120 \pi^2 \nu \frac{E_\lambda}{\lambda^2},$$

wobei sich ergibt

$$E_\lambda = K \frac{E_0}{\lambda_0} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{-n} \cdot e^{-k \lambda_0^2 / \lambda^2} \quad \text{für } t = 0;$$

b) turbulente Dissipation nach dem Gesetz

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial t} = -C' \varrho \frac{u_\lambda^3}{\sqrt{\lambda}}.$$

In diesem Falle ergibt sich

$$E_\lambda = \frac{E_0}{L_0} \left\{ k \left(\frac{\lambda}{L_0}\right)^{-\frac{1}{2}} + K \left(\frac{\lambda}{L_0}\right)^{\frac{m}{2}} \right\}^{-2}.$$

Für beide Fälle läßt sich auch die Gesamtenergie als Funktion von t ausdrücken sowie die Beziehung zwischen dem „Maßstab“ des Feldes (λ_1 im ersten und L_1 im zweiten Fall) und der Zeit t herleiten. Für die beiden Fälle ergeben sich die Gleichungen

$$\lambda_1^2 = \lambda_0^2 + \frac{120 \pi^2 \nu t}{k},$$

$$L_1^{\frac{m+1}{2}} = L_0^{\frac{m+1}{2}} \left(1 + \frac{C u_0 t}{L_0} \right).$$

Die für den zweiten Fall angeschriebene Gleichung wird durch experimentelle Untersuchungen gut bestätigt. H. L. Dryden stellt außerdem noch Betrachtungen über den Zusammenhang seiner Ergebnisse mit denen der Theorie von Th. v. Kármán und G. J. Taylor.

C. L. Pekeris³⁰ geht in seiner Untersuchung des Wirbelgleichgewichtes in einer parallelen scherenden Flüssigkeitsbewegung von der Wirbeltransportgleichung (43) aus. Durch Integration dieser Gleichung zwischen den beiden Wänden findet er Beziehungen zwischen der Erzeugung der turbulenten Wirbel an der Wand und der Wirbeldissipation durch die Flüssigkeit.

Literatur.

- ¹ O. Reynolds: On the dynamical theory of incompressible viscous fluid and the determination of the criterion. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **186**, 123 (1895). — ² J. M. Burgers: On the application of statical mechanics to the theorie of turbulent fluid motion. IV—VI. *Proc., Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* **36**, 276—284, 390—399, 487—496 (1933). — ³ H. A. Lorentz: *Abhandlungen*, Bd. 1, S. 43—71. Leipzig. 1907. — ⁴ J. M. Burgers: *A. a. O.* Part VII. *Proc., Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* **36**, 620—628 (1933). — ⁵ G. F. Trubridge: The statistical theory of turbulent motion. *Math. Gaz.* **18**, 300—310 (1934). — ⁶ W. Tollmien: On the turbulence statistics in Burger's phase space. *Physics* **4**, 289—290 (1933). — ⁷ W. Tollmien: Der Burgersche Phasenraum und einige Fragen der Turbulenzstatistik. *Z. angew. Math. Mechan.* **13**, 331—347 (1933). — ⁸ F. Noether: Dynamische Gesichtspunkte zu einer statistischen Turbulenztheorie. *Z. angew. Math. Mechan.* **13**, 115—120 (1933). — ⁹ G. Dedeant, Ph. Schereschewsky et Ph. Wehrle: Sur la similitude statistique dans les mouvements turbulents des fluides. *C. R. Acad. Sci., Paris* **198**, 1571—1573 (1934). — ¹⁰ G. Dedeant, Ph. Schereschewsky et Ph. Wehrle: Le maximum de probabilité dans les mouvements per-

manents. Application à la turbulence. C. R. Acad. Sci. Paris **200**, 203—205 (1935). —¹¹ H. Gebelein: Turbulenz. Physikalische Statistik und Hydrodynamik. Berlin: Springer-Verlag. 1935. —¹² A. Friedmann und L. Keller: Proc. I. Intern. Congress Applied Mechanics, S. 395. Delft. 1924. —¹³ G. J. Taylor: Statistical theory of turbulence I—IV. Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **151**, 421—478 (1935). —¹⁴ K. Wieghardt: Bericht über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie. Luftfahrt-Forsch. **18**, 1—7 (1941). —¹⁵ S. Goldstein: Modern Developments in fluid mechanics; Bd. I. Oxford. 1938. —¹⁶ Th. v. Kármán: The fundamentals of the statistical theory of turbulence. J. aeronaut. Sci. **4**, 131—138 (1937). —¹⁷ L. F. G. Simmons and C. Salter: Experimental investigation and analysis of the velocity variations in turbulent flow. Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **145**, 212—234 (1934). —¹⁸ H. L. Dryden: Rep. Nat. Advis. Comm. Aeronautics 1930, Nr. 342, 1931, Nr. 392. —¹⁹ L. Prandtl und H. Reichardt: Deutsche Forschung, S. 110. 1934. —²⁰ C. B. Schubauer: A turbulence indicator utilising the diffusion of heat. Rep. Nat. Advis. Comm. Aeronautics 1935, Nr. 524. —²¹ G. J. Taylor: Statistical theory of turbulence. V. Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **156**, 307—317 (1936). —²² G. J. Taylor: Some recent developments in the study of turbulence. Proc. V. Intern. Congr. for Appl. Mechanics, S. 294. Cambridge. 1938. —²³ G. B. Schubauer: The effect of turbulence on transition in the boundary layer of an elliptic cylinder. Proc. V. Intern. Congr. for Appl. Mechanics, S. 321. Cambridge. 1938. —²⁴ H. L. Dryden, G. B. Schubauer, W. C. Mock jr. and H. K. Skramstad: Measurements of intensities and scale of windcanal-turbulence and their relations to the critical Re-number of spheres. Rep. Nat. Advis. Comm. Aeronautics 1937, Nr. 581. —²⁵ G. J. Taylor: The spectrum of turbulence. Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **165**, 476 (1938). —²⁶ L. F. G. Simmons and C. Salter: An experimental determination of the spectrum of turbulence. Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **165**, 73 (1938). —²⁷ Th. v. Kármán and L. Howarth: On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **164**, 192—215 (1938). —²⁸ G. J. Taylor: The statistical theory of isotropic turbulence. J. aeronaut. Sci. **4**, 311—315 (1937). —²⁹ H. L. Dryden: The theory of isotropic turbulence. J. aeronaut. Sci. **4**, 273—280 (1937). —³⁰ C. L. Pekeris: The balance of vorticity in parallel shear motion. J. aeronaut. Sci. **4**, 258—259 (1937).

(Eingegangen am 19. November 1947.)

Persönliches.

Franz Jung, Ehrendoktor der Technischen Hochschule Wien.

Am 21. November 1947 ist Professor Dr. Franz Jung auf einstimmigen Beschluß des Professorenkollegiums zum Ehrendoktor der Technischen Hochschule ernannt worden. Da er am 14. Mai 1947 fünfundsiebzig Jahre alt geworden ist und mit dem vorigen Studienjahr wegen der Altersgrenze als Honorarprofessor seine Lehrtätigkeit einstellen mußte, so möge diese Gelegenheit benützt werden, eine kurze Würdigung seines Wirkens und seiner Arbeiten zu bringen.

Er wurde in Hohenelbe in Böhmen geboren, studierte an der Prager Deutschen Universität Mathematik und Physik und erwarb das Doktorat für Philosophie. Als Assistent an der Technischen Hochschule in Prag habilitierte er sich 1904 als Privatdozent für Mechanik. Zwei Jahre darauf erhielt er einen Lehrauftrag an die Technische Hochschule in Wien, wo er 1911 zum a. o. und 1919 zum ordentlichen Professor der Mechanik ernannt wurde. In den Jahren 1921 bis 1923 war er Dekan der Fakultät für Angewandte Mathematik und Physik und bekleidete 1930/31 die Würde eines Rektors dieser Hochschule. Jung hat 42 Jahre hindurch an unserer Hochschule als Lehrer und Forscher in vorbildlicher Weise gewirkt, tausende von Studenten sind von ihm in die Mechanik, die Grundlage der technischen Wissenschaften eingeführt worden und jene, die ihr Studium ernst nahmen, haben ihm ein gutes Angedenken bewahrt.

Wegen seiner großen Bescheidenheit sind seine hervorragenden Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik und insbesondere der Vektorrechnung vielleicht außerhalb des Kreises der engeren



Fachgenossen nicht in dem Maße gewürdigt worden, als sie es verdienten. Sein Bestreben war immer darauf gerichtet, die anschaulichen Methoden und Ergebnisse der Geometrie in den Dienst der Mechanik zu stellen. Deshalb wandte er sein besonderes Interesse der Vektorrechnung zu, die ja dazu besonders geeignet ist. So gab er in seiner 1903 im Archiv der Mathematik und Physik erschienenen Arbeit „Bemerkung zur Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen“ zum erstenmal eine vektoranalytische Ableitung dieser Gleichungen. Er beschäftigte sich besonders mit den allgemeinen Begriffen des räumlichen Größenfeldes. In einer Reihe von Abhandlungen, die in den Jahren 1908 bis 1910 veröffentlicht wurden und von denen besonders die „Ableitungsbildung im räumlichen Größenfeld“ in der Zeitschrift für Mathematik und Physik und „Die Polarableitung verschiedener Stufe und ihr Zusammenhang“ in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu erwähnen sind, stellte er den allgemeinen Begriff der Feldableitung für Räume beliebiger Dimensionen auf, behandelte deren Zusammenhang mit den Stokesschen und Greenschen Sätzen und führte die Bezeichnung „Affinor“ ein, die dann allgemein angenommen wurde. Als Anwendung dieser Sätze gab er in der 1918 in der Physikalischen Zeitschrift erschienenen Arbeit „Zur Ableitung der Schwerfeldleitungen“ eine klare und einleuchtende Ableitung der Gleichungen der Einsteinschen Relativitätstheorie. Auch auf dem Gebiete der Hydromechanik hat er bedeutsame Arbeiten geliefert. Neben einer schon im Jahre 1909 erschienenen Arbeit „Hydrostatischer Druck auf eine Wandfläche“ stellte er im Jahre 1941 in einer Abhandlung in der Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik „Über den Zusammenhang einiger Formeln für den hydrodynamischen Auftrieb“ Ausdrücke auf, die es in einfacher Weise ohne Reihenentwicklungen erlauben, den Auftrieb und das Auftriebsmoment eines Körpers in einer stationär strömenden Flüssigkeit anzugeben. Noch im Jahre 1946 hat er in unserem Ingenieur-Archiv eine Arbeit über den „Culmannschen und den Mohrschen Kreis“ veröffentlicht.

Jungs Verdienste als Lehrer und Forscher sind aber nicht alles. Er war, was in der jetzigen Zeit besonders hervorzuheben ist, immer ein aufrechter Mann, der auch unter der nationalsozialistischen Herrschaft seine Überzeugung nie aus Furcht vor Nachteilen verleugnete und auf den sich seine Freunde voll und ganz verlassen konnten.

Möge es ihm gegönnt sein, noch viele Jahre in geistiger und körperlicher Frische und Rüstigkeit seiner Arbeit zu leben.

K. Wolf, Wien.

Buchbesprechungen.

Die strenge Lösung für rollende Reibung. Von L. Föppl. 44 S. München: Leibniz-Verlag. 1947.

Professor Ludwig Föppl lebt und löst eine alte Aufgabe der angewandten Mechanik und auch der Oldenbourg-Verlag lebt noch, allerdings unter dem neuen Namen Leibniz-Verlag. Das sind erfreuliche Nachrichten dieses Heftes.

Schub- und Druckverteilung, Schlupf und Beanspruchungen zwischen getriebener und gebremster rollender Walze und ebener Platte (Rad und Schiene) aus vollkommen elastischem und gleichem Baustoff werden errechnet. Die Berührungsfläche wird hierfür in ein Haftgebiet ohne Relativbewegung zwischen den berührenden Teilen zerlegt, in dem überall die Tangentialspannungen gleich groß sind, und in ein Gleitgebiet, in dem Coulombs Reibungsgesetz und Hertzens Druckverteilung gelten. Durch einleuchtende Ansätze über die Spannungsverteilung werden strenge Lösungen gefunden, aus denen sich das Verhältnis μ/μ_0 der Haftreibung zur Gleitreibung und für alle Tangentialkräfte größer als Null das Verhältnis des Schlupfgebietes zur gesamten Berührungsfläche $\alpha_1 = 0.64$ unabhängig von der Größe der Normalkräfte und die Druck-, Schub- und Spannungsverteilungen ergeben. Das Verhältnis des Haftreibungsbeiwertes zum Gleitreibungsbeiwert erreicht einen Größtwert $\mu/\mu_0 = 1.136$, nach dessen Erreichen vollkommenes Gleiten eintritt.

Haftreibungen, größer als Gleitreibungen bei gleicher Belastung, welche auch beobachtet wurden und sich aus den Ansätzen durch strenge Rechnung ergeben, sucht Föppl durch Vorspannungen an der Berührungsfläche zu erklären und verspricht, darauf in einer späteren Arbeit näher einzugehen. Jedoch mögen auch unvollkommene Glätte und Reinheit der Oberfläche und Oberflächenkräfte mitspielen. Der berechnete Schlupf stimmt mit Messungsergebnissen von G. Sachs an Flußeisen und Weißbuche gut überein, die auch $\alpha_1 = 0.64$ unabhängig von der Tangentialkraft vermuten lassen. Allgemeine Formeln über die Spannungen der Walze und Platte sollen noch in einer späteren Arbeit verarbeitet werden.

Während im allgemeinen die ein- und auslaufenden Fasern der Walze und Platte bis auf das Vorzeichen gleich große Spannungen erleiden, kann der Bremsklotz einer gebremsten Walze so nahe der auslaufenden Faser angebracht werden, daß die Spannung der auslaufenden Faser absolut größer wird als der einlaufenden. Auch diesen Fall berechnet Föppl. Schließlich gibt er, für das Anfahrmoment $M_0 = A \alpha_0 N$ mit $\alpha_0 = 0.118$ den Arm $f_0 = 0.118 A$ an, während für gleichbleibende Geschwindigkeit das Rollmoment kleiner als M_0 ist und berechnet die Schlupf-

arbeit für beliebige Tangentialkräfte. Für die unbeschleunigt rollende, weder getriebene noch gebremste Walze ist der Arm der rollenden Reibung $f = 0.098 A$, also kleiner als der Arm des Anfahrmomentes. Darin ist A die halbe Länge der Berührungsfläche in der Bewegungsrichtung, gerechnet nach Hertz.

Hoffen wir mit Föppl, daß er oder Nachfolger bald außer den erwähnten Ergänzungen die Lösungen der übrigen praktisch wichtigen Fälle rollender Reibung auch mit verschiedenen Elastizitätskonstanten für den Durchschnittsingenieur faßbar veröffentlichen können.

L. Richter, Wien.

Der Brückenbau. Herausgegeben von E. Melan. 3. Band: Stahlbrücken. Von F. Hartmann †. 1. Teillieferung. Mit 433 Textabb., XIX, 496 S. Wien: F. Deuticke. 1946. S 100.—

Das bekannte Werk „Der Brückenbau“ von Joseph Melan war durch die bedeutsame Weiterentwicklung, die der Brückenbau während der letzten Jahrzehnte erfahren hatte, überholt worden. Prof. Dr. Ernst Melan der Techn. Hochschule Wien entschloß sich daher, das Werk seines Vaters neu herauszugeben. Als ehemaliger Schüler und Assistent Joseph Melans übernahm der inzwischen verstorbene Ordinarius für Stahlbau der Wiener Techn. Hochschule, Prof. Dr.-Ing. Friedrich Hartmann, die Neubearbeitung des den Stahlbrücken gewidmeten dritten Bandes und legte ihr seine eigenen, dem letzten Stande der Entwicklung angeglichenen Vorlesungen über dieses Fachgebiet zugrunde.

Hartmann hatte die Absicht, diesen Band wegen des bedeutend vermehrten Umfanges nicht mehr in zwei Hälften, sondern in drei Teillieferungen zu veröffentlichen. Hierbei sollte die dritte Teillieferung die Bogen- und Hängebrücken behandeln. Ein tragisches Geschick ließ ihn die bereits weit gediehene Arbeit nicht mehr vollenden; er konnte das Manuskript über die Bogenbrücken nicht mehr abschließen, jenes über die Hängebrücken nicht mehr in Angriff nehmen. Als Hartmann verschied, waren aber die Bogen der ersten Teillieferung bereits ausgedruckt und von der zweiten Teillieferung lagen teils schon Umbrüche, teils erst Bürstenabzüge und zum Teil bloß das handgeschriebene Manuskript vor. Die weitere Betreuung dieses Nachlasses Prof. Hartmanns übernahm der Herausgeber des Gesamtwerkes „Der Brückenbau“, Prof. Dr. Ernst Melan, und mit seiner Hilfe dürfte es dem Verlag F. Deuticke in Kürze gelingen, auch die zweite Teillieferung, die mit der ersten ein in sich abgeschlossenes Werk über feste stählerne Balkenbrücken bilden wird, der Öffentlichkeit zu übergeben.

In der vorliegenden ersten Teillieferung werden zunächst die Baustoffe, die Konstruktionselemente und die Verbindungsmittel einschließlich der Schweißverbindungen behandelt, wobei der Frage der Dauerfestigkeit, besonders im Zusammenhange mit der Verwendung hochwertiger Baustähle, besondere Beachtung zugewendet wird. Es folgen allgemeine Betrachtungen über die verschiedenen Arten von Brücken, über die in Frage kommenden Tragwerkssysteme, über die Querschnittsausbildung der Brücken, über die Festlegung ihrer Licht- und Stützweiten und über die Austeilung allfälliger Zwischenpfeiler; auch die schönheitliche Wirkung der Brücken und die notwendige Einfügung in das Stadt- bzw. Landschaftsbild wird berücksichtigt. Bei der anschließenden Erörterung der einwirkenden Kräfte wird besonders auch der dynamische Einfluß der Verkehrsbelastung gewürdigt und es werden Ergebnisse von Messungen und von theoretischen Überlegungen den bezüglichlichen Bestimmungen unserer derzeitigen Vorschriften gegenübergestellt. Im Absatz „Sicherheit und zulässige Inanspruchnahme“ werden die Möglichkeiten des Versagens stählerner Brücken — Auftreten unzulässiger großer Formänderungen, Bruch eines Baugliedes nach häufig wiederholter Belastung oder nach einmaliger Überschreitung der Knickgrenze — aufgezeigt; das Zustandekommen großer Formänderungen wird unter Berücksichtigung der elastisch-plastischen Eigenschaften der Baustähle an fachwerkartigen und an vollwandigen Tragwerken untersucht und das unterschiedliche Verhalten statisch bestimmter und unbestimmter Systeme dargelegt.

Die folgenden Absätze befassen sich mit Stabilitätsproblemen, wobei der Autor über den Inhalt seines bekannten Buches „Knickung, Kippung, Beulung“ (Wien, F. Deuticke, 1937) zum Teil hinausgegangen ist. So hat er ein von Prof. Dr. E. Chwalla entwickeltes Verfahren zur Berechnung exzentrisch gedrückter Stäbe auf seitliches Ausdrehen (Biegedrillknicken) angenommen, wodurch eine, bei der Bemessung T-förmiger Druckgurte zutage getretene Lücke der Stabilitätstheorie geschlossen werden konnte. Auch hat er die Beulung versteifter Rechteckplatten viel ausführlicher behandelt.

Nach einem kurzen Abriß über die Berechnung und die konstruktive Gestaltung genieteter Anschlüsse und Stöße wird sodann eingehend die Berechnung und die Durchbildung des genieteten sowie des geschweißten Vollwandträgers dargelegt. Hierbei werden alle mit der Schweißung zusammenhängenden, für die Entwurfsbearbeitung wichtigen Fragen über schweißgerechte Konstruktion, Schrumpfwirkungen und Eigenspannungen, günstigste Reihenfolge der Schweißungen, Montageeinzelheiten usw. behandelt.

Sodann wird die Konstruktion der Fahrbahn von Straßen- und Eisenbahnbrücken erörtert. Unter den ausgewählten mustergültigen Beispielen finden sich auch neueste Ausführungen von Fahrbahnen für Straßenbrücken mit betongefüllten weitgespannten Buckel- und Hängeblechen, sowie Leichtfahrbahnen. Neben der den Vorschriften und Normen entsprechenden Berechnung der Fahrbahnträger wird auch eine genauere Berechnung gegeben und sodann die konstruktive Gestaltung des Trägergerippes besprochen. Dieser Absatz enthält auch eine eingehende Untersuchung über den Einfluß der Gurtdehnungen der Hauptträger auf die Fahrbahn, worauf die Maßnahmen zur möglichsten Beschränkung der Zusatzspannungen erörtert werden. Einer Zusammenstellung der Querschnitte von neueren Brücken genieteter und geschweißter Ausführung sind auch Einzelheiten über die Entwässerung, über den Fahrbahnübergang auf die Widerlager usw. zu entnehmen.

Der folgende, den schiefen Brücken gewidmete Absatz zeigt die möglichen Anordnungen des Trägergerippes, konstruktive Einzelheiten der Anschlüsse und enthält die Ermittlung der in diesen Brücken auftretenden zusätzlichen Spannungen. Der Absatz „Hauptträger“ bringt auch die Berechnung seitlich gekrümmter Hauptträger.

Im anschließenden Absatz „Trägerrostbrücken“ wird nach Hinweis auf besondere Berechnungsverfahren das leichtverständliche und an keine besonderen Voraussetzungen gebundene elementare Verfahren der Baustatik dargelegt, das für praktische Berechnungen dann in Frage kommt, wenn eine geringere Zahl von Hauptträgern und wirksamen Querverbindungen vorliegt. Zur Erläuterung wird ein Tragwerk, bestehend aus vier Hauptträgern mit drei Zwischenquerverbindungen, in dieser Weise durchgerechnet. Den Abschluß dieses Absatzes wird erst die zweite Teillieferung bringen, die vor allem die Fachwerksbrücken behandeln wird.

Es war immer das Bestreben Hartmanns, die Einwirkungen, denen die Tragwerke und ihre Teile unterworfen sind, schärfer zu erfassen und den Verlauf und die Größe der inneren Kräfte genauer zu ermitteln, um dafür den Werkstoff höher ausnützen zu können. Hieraus erklärt sich die vertiefte Behandlung theoretischer Fragen. Erstaunlich ist die große Zahl eigener Arbeiten, auf die er sich beim Aufbau des Stoffes stützen konnte. Das Buch ist in leicht verständlicher Weise abgefaßt; die Anwendung der verschiedenen Berechnungsverfahren wird an zahlreichen Zahlenbeispielen anschaulich dargelegt. Die zur Erläuterung konstruktiver Einzelheiten und zur Schulung des konstruktiven Gefühls dienenden Abbildungen sind mit großer Sorgfalt ausgewählt worden und betreffen mustergültige Brückenausführungen. Das Buch ist sowohl den Studierenden der Technischen Hochschulen als auch jenen Ingenieuren der Praxis, die sich in das Fachgebiet einarbeiten oder die ihre Kenntnisse über den Stahlbrückenbau vertiefen und neue Anregungen empfangen wollen, bestens zu empfehlen. Dem Verlag F. Deuticke ist es trotz der ungünstigen Verhältnisse gelungen, das Buch in ausgezeichneter Ausstattung herauszubringen.

K. Girkmann, Wien.

Die philosophischen Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis. Von A. Fischer. VI, 240 S. Wien: Springer-Verlag. 1947. In Österreich: S 30.—. Im Ausland: sfr 18.—.

Die in der heutigen Zeit sich vollziehende stürmische Entwicklung der Wissenschaften nötigt viele Wissenschaftler, sich mit den Problemen der wissenschaftlichen Erkenntnis auseinanderzusetzen. Andererseits fühlen viele Fachphilosophen das Bedürfnis, sich in die Problematik der Einzelwissenschaften zu vertiefen.

Der Verfasser stellt sich in diesem Buche die Aufgabe, eine sachliche Darstellung der Probleme der Erkenntnislehre zu geben, um die „philosophisch interessierten Wissenschaftler zum weiteren Nachdenken über die Grundlagen ihrer Sondergebiete anzuregen“.

Der Inhalt des Buches gliedert sich in sieben Abschnitte, in denen Sinn und Wesen der wissenschaftlichen Erkenntnis, die Psychologie der Erkenntnisvorgänge, die logischen Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis, die Arbeitsmethoden der Wissenschaft, die Grundprobleme der Erkenntnistheorie, naturphilosophische Grenzfragen und eine Betrachtung der Geisteswissenschaften behandelt werden. Jedem Abschnitt ist ein Literaturverzeichnis angefügt, das eine weitere Vertiefung in die Probleme ermöglicht.

Dem Verfasser ist es durchaus gelungen, seine antipositivistische Einstellung durch Zitate moderner und klassischer Autoren zu erhärten und darzulegen, daß die „unendliche Aufgabe, die dem Menschen und seinem transzendenten Wissensdrang gestellt ist, auf der Erkenntnis des Seienden beruht“.

Im gesamten stellt das Buch einen tiefgründigen Beitrag dar, „der Wissenschaft jene Stellung in unserem Wertesystem wiederzugeben, welche ihr, als der höchsten Leistung der menschlichen Vernunft, gebührt“ und kann daher auf das beste empfohlen werden. F. Kracmar, Wien.

Allgemeine Methodenlehre der Statistik. Ein Lehrbuch für alle wissenschaftlichen Hochschulen. Von Prof. Dr. F. Klezl-Norberg, Wien. Zweite, ergänzte Auflage. Mit 14 Abbildungen. XVI, 279 Seiten. 1946. In Österreich S 27.—
Im Ausland sfr. 24.—

Wirtschaftsstatistik in Theorie und Praxis. Von Prof. Dr. F. Klezl-Norberg, Wien. XVI, 340 Seiten. 1947. In Österreich S 44.—
Im Ausland sfr. 24.—

Voraussetzungen der Vollbeschäftigung. Von Priv.-Doz. Dr. K. Gruber, Wien. III, 89 Seiten. 1946. In Österreich S 10.80
Im Ausland sfr. 6.—

Die Rentabilität industrieller Anschaffungen. Fehlinvestitionen, ihre Ursachen und ihre Verhütung. Von Oberbaurat Ing. M. Gerbel, Wien. Mit 23 Abbildungen. X, 231 Seiten. 1947. In Österreich S 42.—
Im Ausland sfr. 20.—

Die Bodenschätze Österreichs und ihre wirtschaftliche Bedeutung. Von Prof. Dr. B. Granigg, Graz. VII, 132 Seiten. 1947. In Österreich S 36.—
Im Ausland sfr. 18.—

Die Volkswirtschaft Österreichs und ihr Wiederaufbau. Von Dr. C. Hudeczek, Wien. VII, 229 Seiten. 1946. In Österreich S 30.—
Im Ausland sfr. 20.—

Österreichische Zeitschrift für Nationalökonomie. Herausgegeben von Prof. Dr. H. Mayer, Wien, und Prof. Dr. A. Mahr, Wien. Fortsetzung der „Zeitschrift für Nationalökonomie“. Die Zeitschrift erscheint zwanglos nach Maßgabe des einlaufenden Materials in einzeln berechneten Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von etwa 400 Seiten vereinigt werden. Jährlich erscheint etwa 1 Band.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

Die Verbrennungskraftmaschine

Herausgegeben von

Prof. Dr. **Hans List**, Graz.

Erscheint in 16 Bänden, die in sich abgeschlossen und einzeln käuflich sind.

Soeben sind erschienen:

- Band 8, Teil 2: **Die Dynamik der Verbrennungskraftmaschine.** Von Prof. Dr.-Ing. **H. Schrön**, München. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 187 Abbildungen. VIII, 201 Seiten.
In Österreich S 72.—, im Ausland sfr. 36.—
- Band 9: **Die Steuerung der Verbrennungskraftmaschinen.** Von Prof. Dr. techn. Ing. **A. Pischinger**, Graz. Mit 269 Abbildungen. VII, 240 Seiten. 1948.
In Österreich S 120.—, im Ausland sfr. 60.—
- Band 12: **Ortsfeste und Schiffsdieselmotoren.** Von Ob.-Ing. **F. Mayr**, Augsburg. Zweite, unveränderte Auflage. Mit 318 Abbildungen. VIII, 330 Seiten.
In Österreich S 128.—, im Ausland sfr. 64.—

Im Sommer und Herbst 1948 erscheinen:

- Band 1, Teil 1: **Betriebsstoffe.** Von Priv.-Doz. Dr. **A. Philippovich**, Wien. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 80 Abbildungen. Etwa 160 Seiten.
- Band 4, Teil 1: **Ladungswechsel.** Allgemeine Grundlagen, Berechnung der Strömungsvorgänge. Von Prof. Dr. **H. List**, Graz, und Dr. **G. Reyl**, Graz. Mit 130 Abbildungen. Etwa 200 Seiten.
- Band 10: **Das Triebwerk schnelllaufender Verbrennungskraftmaschinen.** Von Ob.-Ing. **H. Kremser**, Graz. Zweite, neubearbeitete Auflage.

In Vorbereitung befinden sich und werden im Laufe der Jahre 1948 und 1949 erscheinen, so daß das Werk dann vollständig vorliegt:

- Band 1, Teil 2: **Gaserzeuger (Generatoren, Fahrzeuggeneratoren).** Von Prof. Dr. **H. List**, Graz, und Ob.-Ing. **K. Schmidt**, Köln-Deutz. Zweite Auflage.
- Band 2, Teil 1: **Thermodynamik und Verlustteilung der Kolbenverbrennungskraftmaschine.** Von Prof. Dr. **H. List**, Graz. Zweite Auflage.
- Band 2, Teil 2: **Thermodynamik der Gasturbine.** Von Prof. Dr. **H. List** und Dr. **O. Herschmann**, Graz.
- Band 3: **Wärmeübergang.** Von Prof. Dr. **H. List**, Graz, und Prof. Dr. **A. Pischinger**, Graz.
- Band 4, Teil 2: **Ladungswechsel.** Zweitakt und Viertakt. Von Prof. Dr. **H. List**, Graz.
- Band 5: **Die Gasmaschine.** Zweite Auflage, gänzlich neu bearbeitet von Dr. **M. Leiker**, Köln-Deutz.
- Band 6: **Gemischbildung im Verbrennungsmotor.** Von Prof. Dr.-Ing. **L. Richter**, Wien, u. a.
- Band 7: **Gemischbildung im Dieselmotor.** Von Prof. Dr. **A. Pischinger**, Graz. Zweite Auflage.
- Band 8, Teil 1: **Konstruktive Grundlagen der Verbrennungskraftmaschine.** Lager und Schmierung. Von Dr. **A. Klemencie**, Graz. Werkstoff und Festigkeit. Von Dr. **A. Slattenschek**, Graz.
- Band 11: **Der Aufbau schnelllaufender Verbrennungskraftmaschinen für Kraftfahrzeuge und Triebwagen.** Von Ob.-Ing. **H. Kremser**, Graz. Zweite, neubearbeitete Auflage.
- Band 13: **Flugmotoren.**
- Band 14: **Betriebszahlen, Verschleiß und Wirtschaftlichkeit der Verbrennungskraftmaschine.** Von Dr.-Ing. **C. Englisch**, Neckarsulm. Zweite, neubearbeitete u. ergänzte Auflage.
- Band 15: **Hilfsmaschinen der Verbrennungskraftmaschine mit besonderer Berücksichtigung der Strömungsmaschinen (Abgasturbinen, Gebläse usw.).** Von Prof. Dr.-Ing. **E. Niedermayer**, Graz.
- Band 16: **Die Gasturbine.**

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

Printed in Austria